

שם הקורס: טופולוגיה

שם המרצה: פרופ' מגרל

מתרגלים: מני וסולי

תרגיל בית מספר 8

שאלה 1

נתבונן ב- (\mathbb{R}, T) כאשר T היא הטופולוגיה של סורגנפריי. נגדיר פונקציה

$$f: (\mathbb{R}, T) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ ע"י } f(x) = [x]. \text{ האם } f \text{ פונקציה רציפה?}$$

שאלה 2

תהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f(X)$ כתת מרחב טופולוגי של Y .

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f(X)$.

ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f(X)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y .

שאלה 3

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

$$א. f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ המוגדרת ע"י } f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$ב. f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ המוגדרת ע"י } f_2(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ג. $f_3 : X \rightarrow \mathbb{R}$ עבור $X = [2,3] \cup [4,5)$ המוגדרת ע"י

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in [2,3] \\ x & x \in [4,5) \end{cases}$$

שאלה 4

הראו שתת-מרחב סגור של מרחב נורמלי הוא נורמלי.

שאלה 5

תהי $A = (2,3) \cup (5,8)$ (איחוד קטעים פתוחים) ותהי $B = A \times \mathbb{R}$ האם B תת מרחב קשיר של \mathbb{R}^2 ?

שאלת בונוס

הוכח או הפרך:

קיימת פונקציה רציפה ועל $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$.