07/07/15

<u>פתרון:</u> מבחן מסכם - 88-642 קורס תורת המשחקים

מועד **א'**, סמסטר ב', תשע"ה

מרצה – ארז שיינר

משך המבחן – שעתיים וחצי.

חומר עזר – מחשבון פשוט בלבד

הוראות: <u>יש לענות על דפי השאלון בלבד</u>. מחברת הבחינה תשתמש לכם כטיוטה ולא תבדק.

ניתן לענות על כל השאלות, כל שאלה שווה 40 נק'. כל ציון מעל 100 יעוגל למטה (ל100)

שאלה 1

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

A

1

	L	R
U	0,1,0,3	0,2,2,2
D	3,-1,-1,0	0,2,1,2

2

	L	R
U	0,2,2,1	3,3,2,0
D	2,0,1,0	3,0,0,-1

B

1

	L	R
U	1,1,2,1	-1,3,3,2
D	0,0,0,1	1,2,2,2

2

	L	R
U	-1,2,2,1	2,4,1,0
D	1,1,1,0	1,3,0,4

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

1. ______D______ 2. ______1_____ 3. _____R______ 4. ______B_____

רשמו את ערך המקסמין של שחקן 1 ____0____ ואת אסטרטגיית המקסמין שלו ____A_____

ב. יהי משחק סכום אפס עם ערך. **הוכיחו/הפריכו:** אם נמחק אסטרטגיות נשלטות חלש, בהכרח נקבל משחק עם ערך.
(רמז: מחיקת אסטרטגיה של שחקן אחד לא יכולה להקטין את ערך המקסמין של שחקן אחר)

<u>הוכחה</u>:

מספיק להוכיח שמחיקת אסטרטגיה נשלטת חלש אחת משאירה משחק עם ערך, ולכן מחיקה של מספר סופי של אסטרטגיות נשלטות חלש משאירה משחק עם ערך.

נניח מחקנו אסטרטגיה נשלטת חלש S של שחקן 1. נסמן:

$\underline{v_1}$ ערך המקסמין של המשחק המקורי

$\overline{v_1}$ ערך המינמקס של המשחק המקורי

$\underline{v_2}$ ערך המקסמין של המשחק לאחר המחיקה

$\overline{v_2}$ ערך המינמקס של המשחק לאחר המחיקה.

לפי משפט מההרצאה, ערך המקסמין של שחקן 1 לא משתנה ממחיקת אסטרטגיה נשלטת,
ובמשחק סכום אפס ערך המקסמין של שחקן 1 הוא ערך המקסמין של המשחק.

לכן $\underline{v_1} = \underline{v_2}$

כמו כן, מחיקת אסטרטגיה **כלשהי** של שחקן 1, לא יכולה להקטין את ערך המקסמין של שחקן 2.
כיוון שערך המינמקס של המשחק הוא מינוס ערך המקסמין של שחקן 2, נובע כי

$-\overline{v_1} \leq -\overline{v_2}$ ולכן $\overline{v_1} \geq \overline{v_2}$

בכל משחק סכום אפס ידוע שערך המקסמין קטן או שווה לערך המינמקס. סה"כ נקבל כי:

$$\underline{v_1} = \underline{v_2} \leq \overline{v_2} \leq \overline{v_1}$$

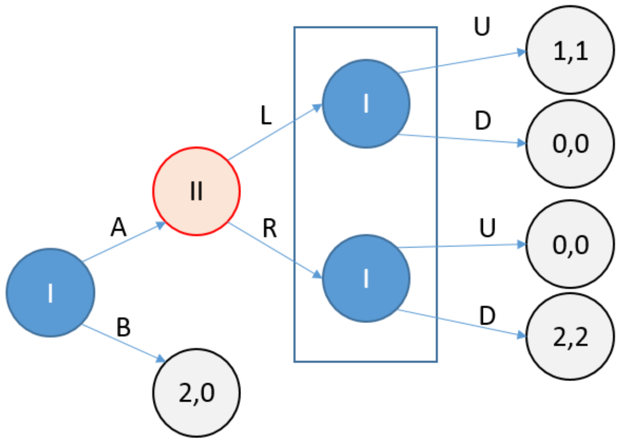
לבסוף, כיוון שלמשחק המקורי יש ערך, נובע כי המקסמין שלו שווה למינמקס שלו וסה"כ נקבל:

$$\underline{v_1} = \underline{v_2} = \overline{v_2} = \overline{v_1}$$

ולכן גם למשחק החדש יש ערך, אותו ערך של המשחק המקורי.

.2

א. רשמו את כל שיווי המשקל המשוכללים במשחק הבא ________(BU,L), (AD,R), (BD,R)________



ב. מצאו את כל שיווי המשקל במשחק הבא באמצעות אסטרטגיות מעורבות ו/או טהורות :

	L	R
T	1,0	0,2
B	0,1	1,0

נניח ששחקן אחד ישחק T בהסתברות p ושחקן 2 ישחק L בהסתברות q.

לכן

$$u_1(p,q)=1\cdot pq+0\cdot p(1-q)+0\cdot(1-p)q+1\cdot(1-p)(1-q)=1-p-q+2pq$$

$$u_2(p,q)=0\cdot pq+2\cdot p(1-q)+1\cdot(1-p)q+0\cdot(1-p)(1-q)=2p+q-3pq$$

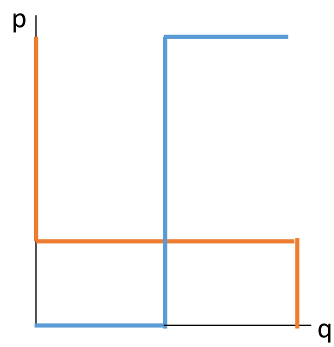
נחשב את התגובה המיטבית של שחקן 1 בהינתן בחירת q של שחקן 2 וההפך:

$$u_1(p,q)=(2q-1)\text{p}+1-q$$

$$BR_1(q)=\begin{cases}1 & q>\frac{1}{2}\\ [0,1] & q=\frac{1}{2}\\ 0 & q<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$u_2(p,q)=(1-3p)\text{q}+2p$$

$$BR_2(p)=\begin{cases}0 & p>\frac{1}{3}\\ [0,1] & p=\frac{1}{3}\\ 1 & p<\frac{1}{3}\end{cases}$$



לכן נק' שיווי המשקל היחידה הינה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

.3

א. פונקציות התשלום של שני שחקנים במשחק אסטרטגי רציף נתונות, כאשר $x, y \in [0,1]$

$$U_1(x,y) = x + y \qquad\qquad U_2(x,y) = -\left(y + 4x(x-1)\right)^2$$

מצאו את כל נקודות שיווי המשקל של המשחק או הוכיחו שלא קיימות כאלה.

נחשב תגובות מיטביות.

ללא תלות בערך של y, שחקן אחד יעדיף לבחור את ערך x הכי גדול אפשרי ולכן:

$$BR_1(y) = 1$$

כמו כן, כיוון שפונקציית התשלום של שחקן 2 היא אי שלילית, המקסימום שלה יתקבל באפס (אם זה אפשרי). אכן, בתחום מתקיים כי $0 \le -4x(x-1) \le 1$ ולכן

$$BR_2\left(x\right) = -4x(x-1)$$

ביחד סה"כ נק' שיווי המשקל צריכה לקיים:

$$x = BR_1(y) = 1$$
$$y = BR_2\left(x\right) = -4x(x-1)$$

ולכן נק' שיווי המשקל היחידה הינה $(1,0)$

ב. נביט במשחק מסעיף א' כמשחק בצורה רחבה בו שחקן 1 משחק ראשון, ולאחר מכן שחקן 2 מגיב.
כיצד תשובתכם תשתנה?

שחקן 1 יודע שאם הוא ישחק x שחקן 2 בהכרח ישחק את התגובה המיטבית $BR_2(x) = -4x(x-1)$.

לכן התשלום שלו יהיה $U_1(x, -4x(x-1)) = x - 4x(x-1) = -4x^2 + 5x$.

התשלום יהיה מקסימלי כאשר $x = \frac{5}{8}$.

לכן שיווי המשקל יהיה $\left(\frac{5}{8}, \frac{15}{16}\right)$