תורת המשחקים – שיעור 14

כמה מילים לגבי המבחן
משחקים עם מהלכי גורל
משחקים עם חזרות

מבנה המבחן

- במבחן יהיו 4 שאלות **ללא בחירה**.
- השאלות יקבלו ציון לפי הסולם הבא:
  - השאלה עם הפתרון הכי טוב תקבל עד 40 נקודות
  - השאלה עם הפתרון השני הכי טוב תקבל עד 30 נקודות
  - השאלה עם הפתרון השלישי הכי טוב תקבל עד 20 נקודות
  - השאלה עם הפתרון הרביעי הכי טוב תקבל עד 10 נקודות
  - (כך ייתכן שלמרות ששני סטודנטים ענו אותו דבר על שאלה, אחת תקבל 30 והשני יקבל 20).
- שתי שאלות יהיו מאד דומות לשאלות בתרגילי הבית/דוגמאות בכיתה.
- שתי שאלות יהיו מעט שונות (לדוג' סיפור רקע שונה) אבל כמובן שדרכי הפתרון יהיו דומות מאד לתרגילים שכבר ראיתם.

מה צריך לדעת לקראת המבחן?

- לדעת ולהבין את כל ההגדרות בקורס.
- את כל המשפטים בקורס (אין צורך ללמוד הוכחות בע"פ). אם אתם משתמשים במשפט במהלך המבחן יש לנסח אותו במלואו בצורה מדויקת.
- להכיר את כל הדוגמאות ודרכי הפתרון שלמדנו בשיעורים.
- להכיר את כל תרגילי הבית.

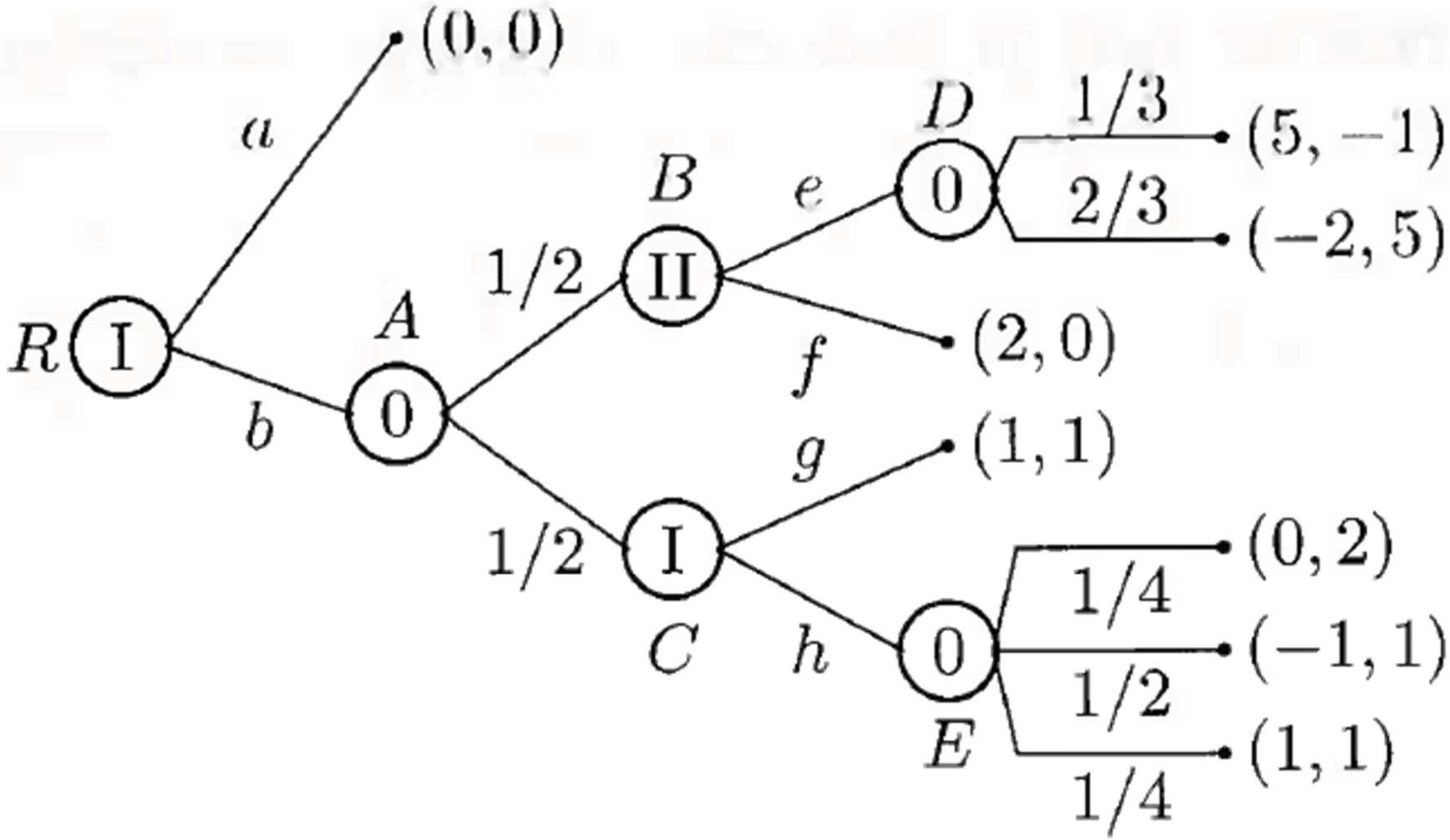
מה תקבלו לקראת המבחן

- פתרונות של תרגילי הבית
- מבחן לדוגמה: דומה במבנה שלו למבחן שתקבלו

משחקים בצורה רחבה עם מהלכי גורל

- רוצים לתאר בעזרת משחקים בצורה רחבה גם משחקים בהם יש "מהלכי גורל" כלומר מהלכים הסתברותיים או הגרלות.
- דוגמה למשחקים עם מהלכי גורל: שש-בש, מונופול, וכו'.
- דוגמה למשחקים שדורשים גם מהלכי גורל וגם קבוצות ידיעה: פוקר, בלקג'ק, וכו'.
- איך עושים זאת? מוסיפים שחקן 0 למשחק, אשר מהלכיו תלויים בהסתברויות.

דוגמה



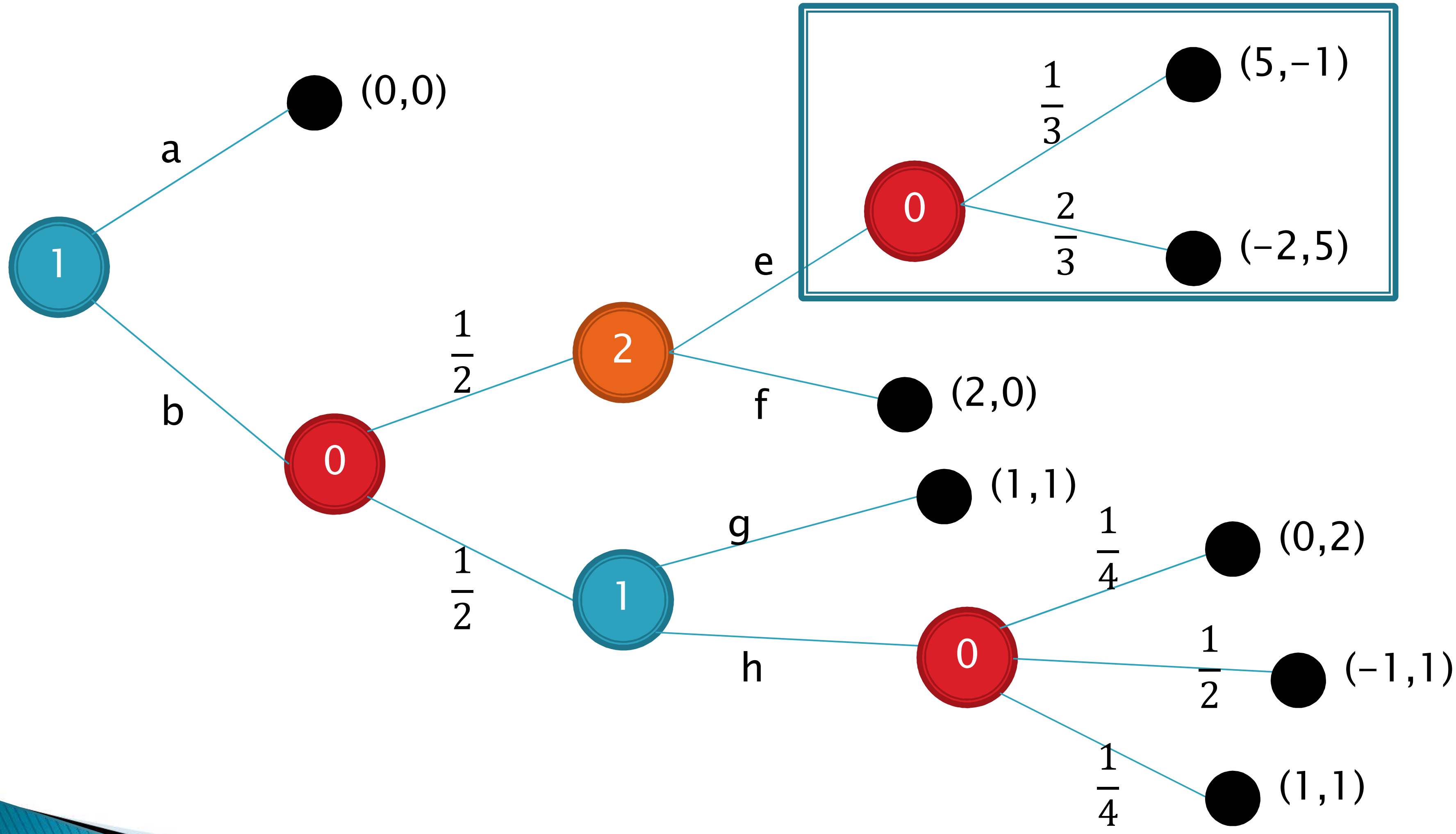
מהלכי גורל – פונקציות תשלום

- כיצד נקבעות פונקציות התשלום במשחקים בצורה רחבה עם מהלכי גורל?
- האסטרטגיות של השחקנים קובעות את תוצאת המשחק עד כדי ההגרלות שמתבצעות בתורות של שחקן 0.
- התשלומים ייקבעו בעזרת תוחלת התשלומים של כל ההגרלות.

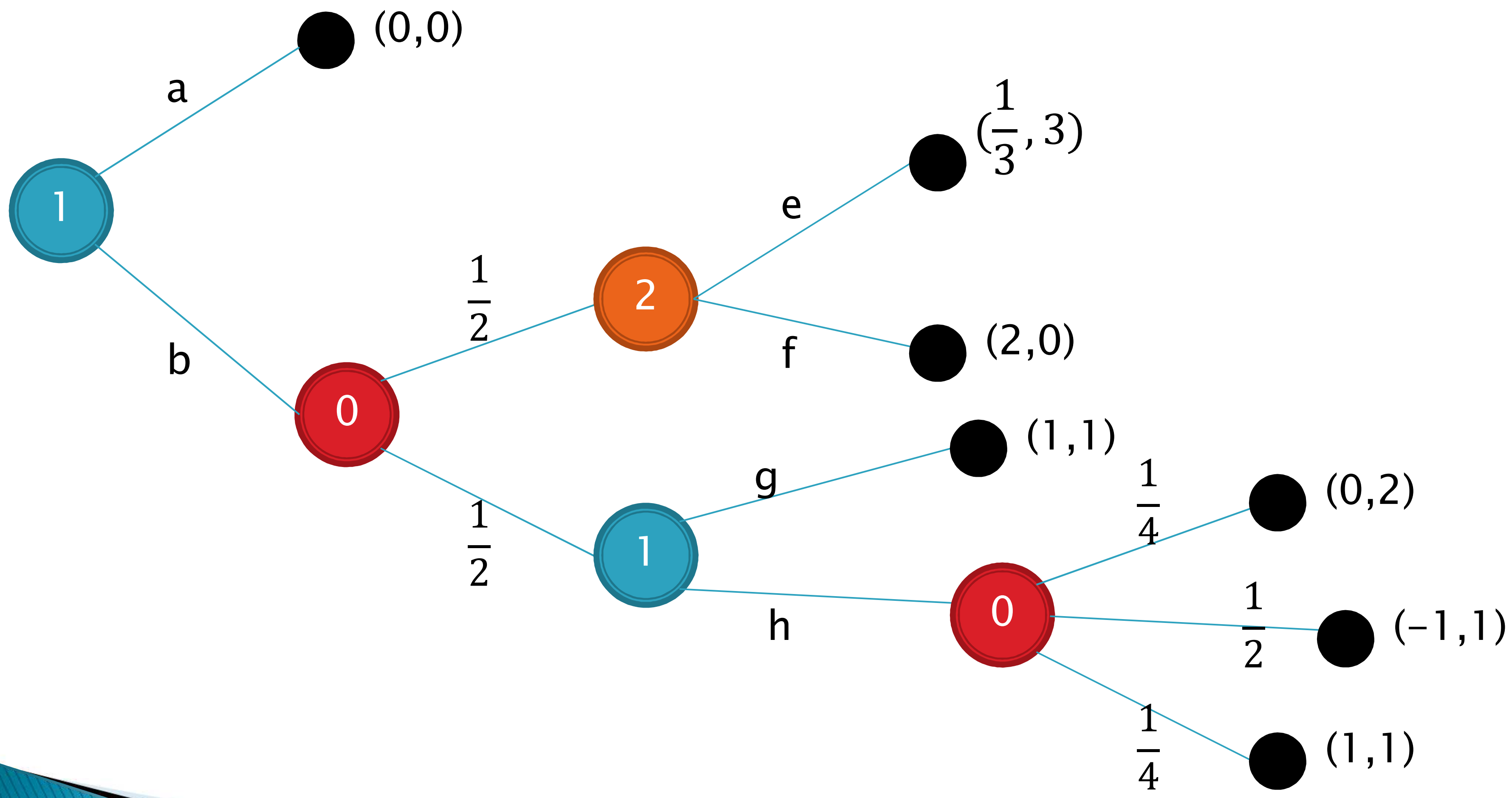
מהלכי גורל – פונקציות תשלום

- לדוגמה, אם האסטרטגיה של שחקן I היא $s_I = \{b, g\}$ והאסטרטגיה של שחקן II היא $s_{II} = \{f\}$, נקבל את התחרויות האפשריות הבאות (נרשום מסלולים בעזרת הקדקדים):
- R–>A–>B–>(2,0)
- R–>A–>C–>(1,1)
- אם כך התשלום לאסטרטגיות אלה יהיה:
- $u_I(s_I, s_{II}) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$
- $u_{II}(s_I, s_{II}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

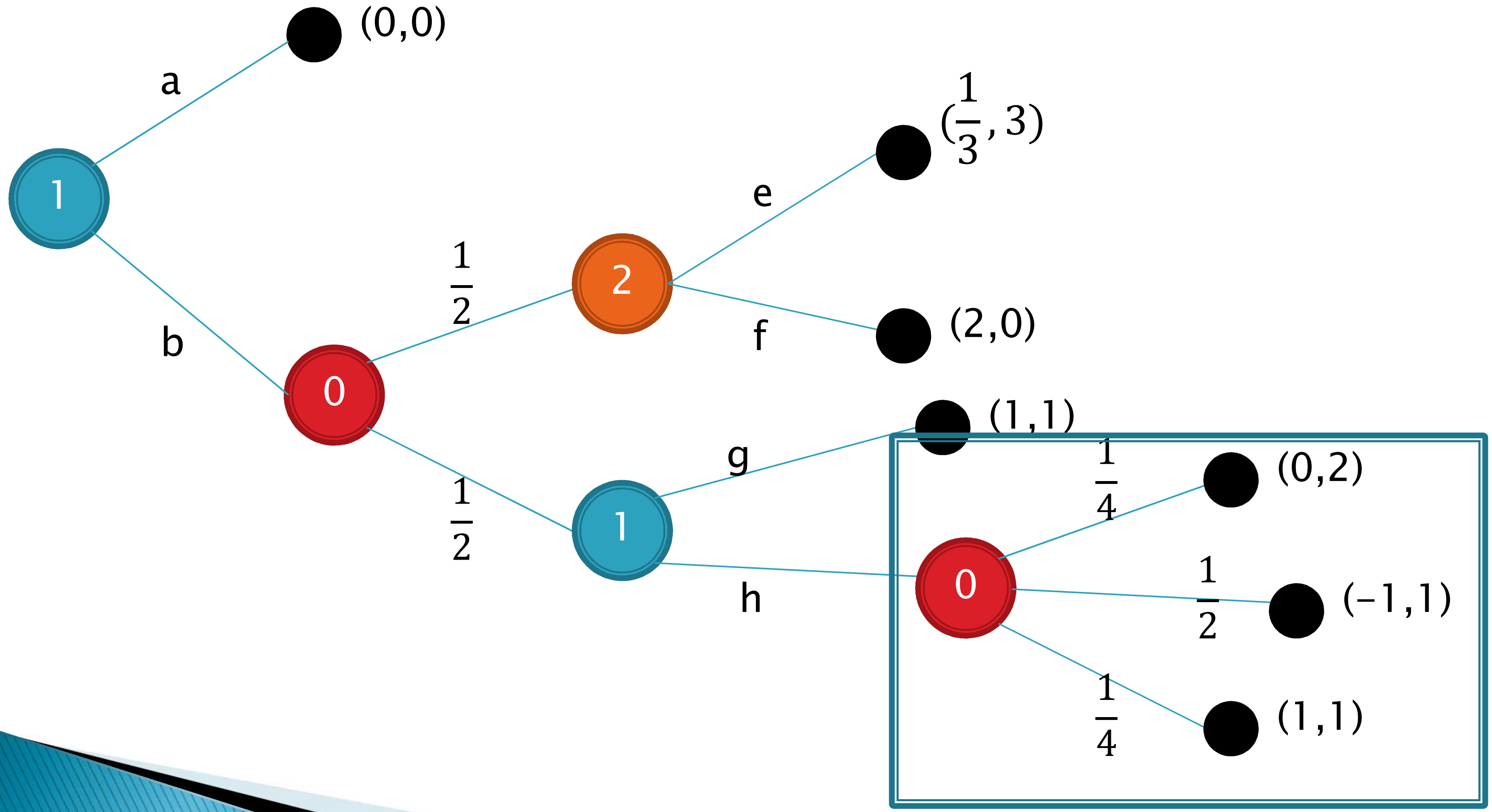
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



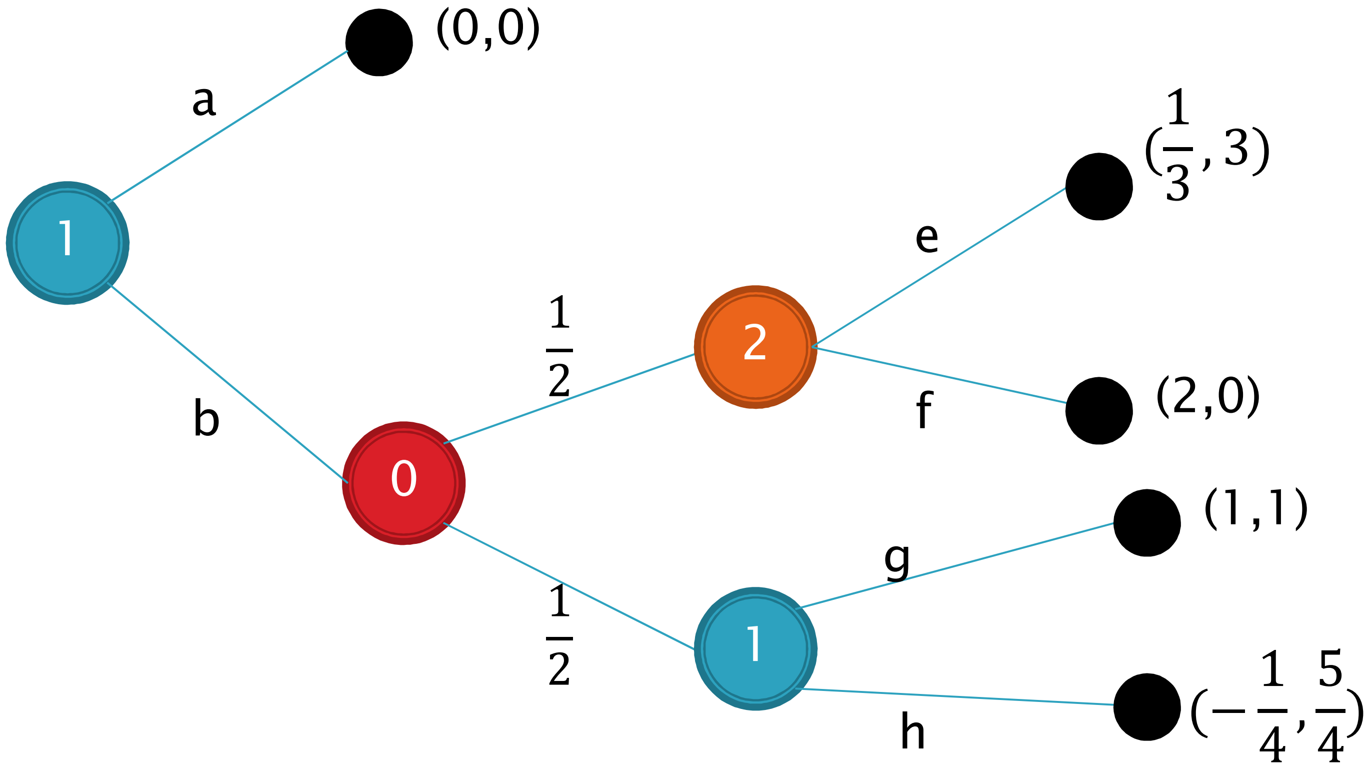
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



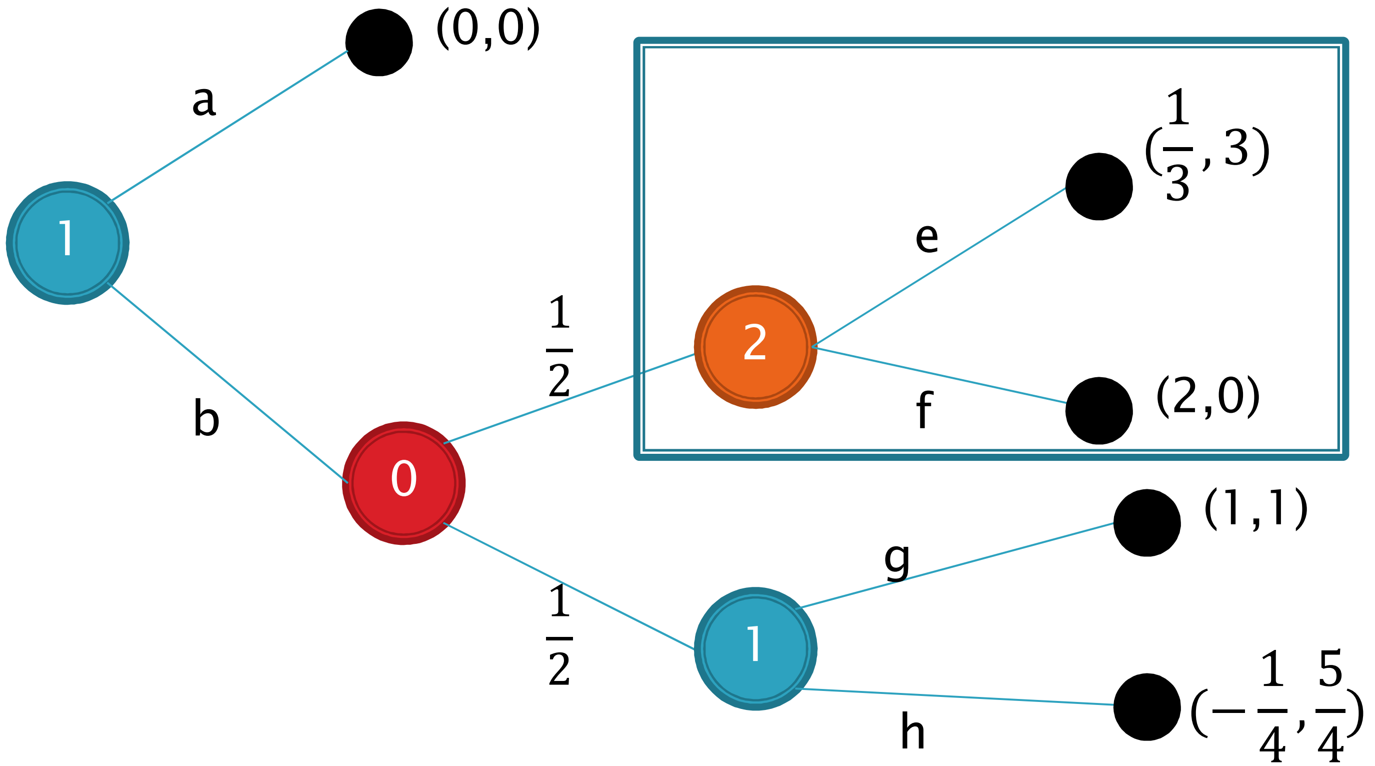
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



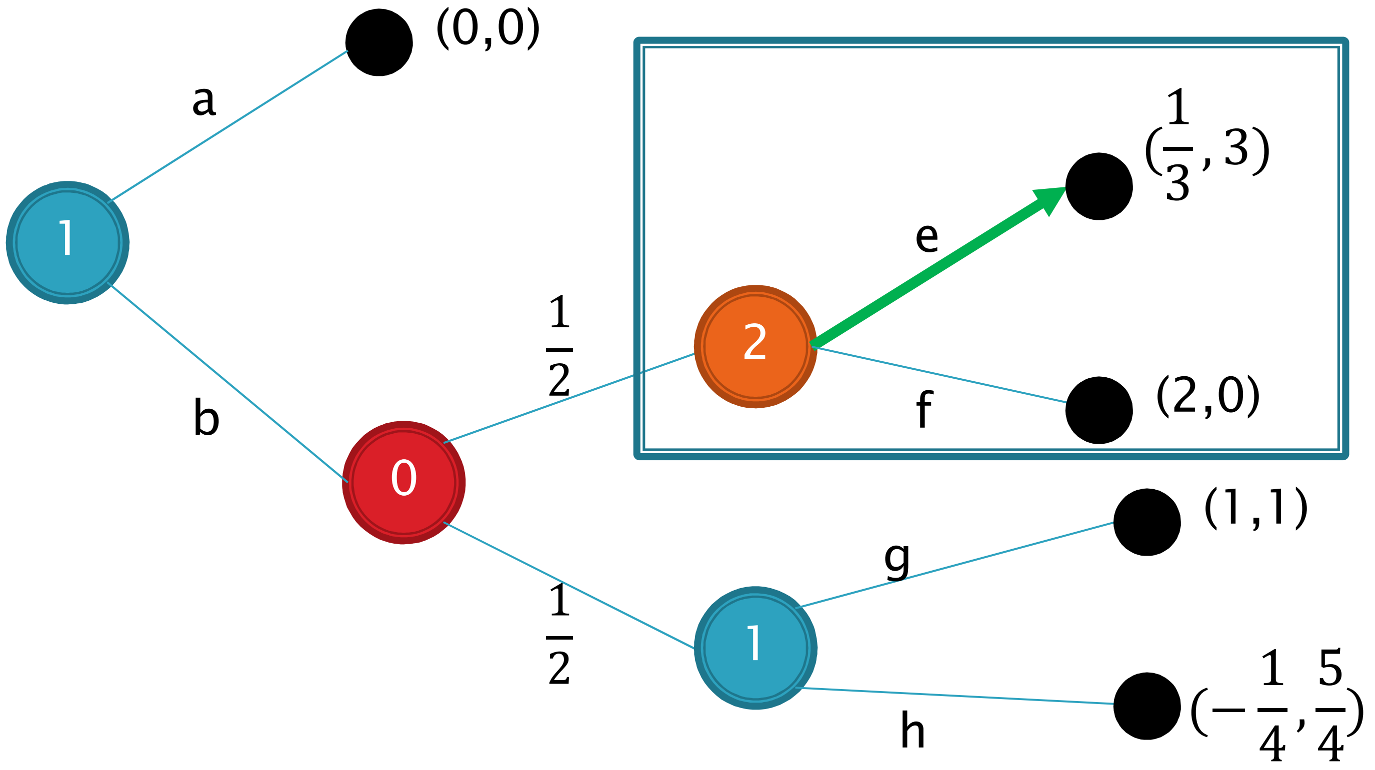
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור

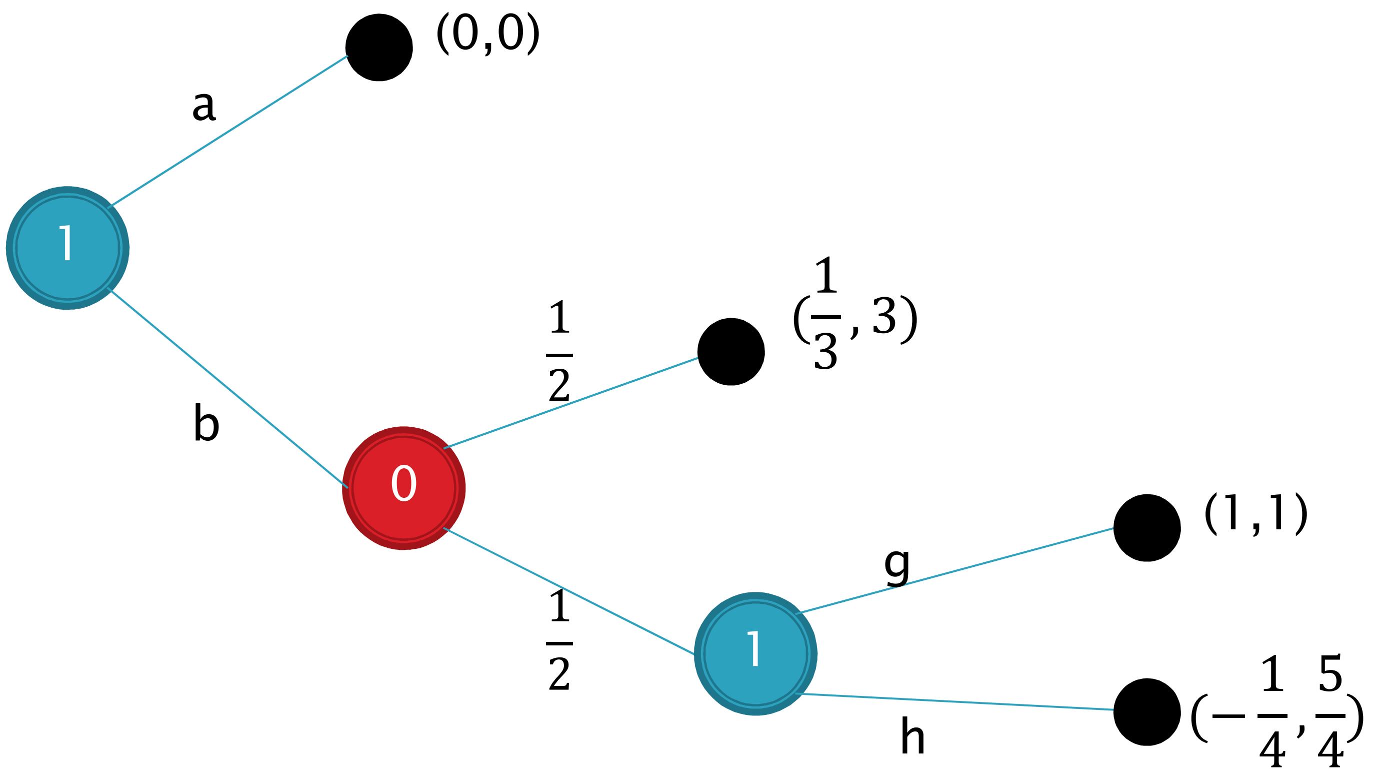


מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



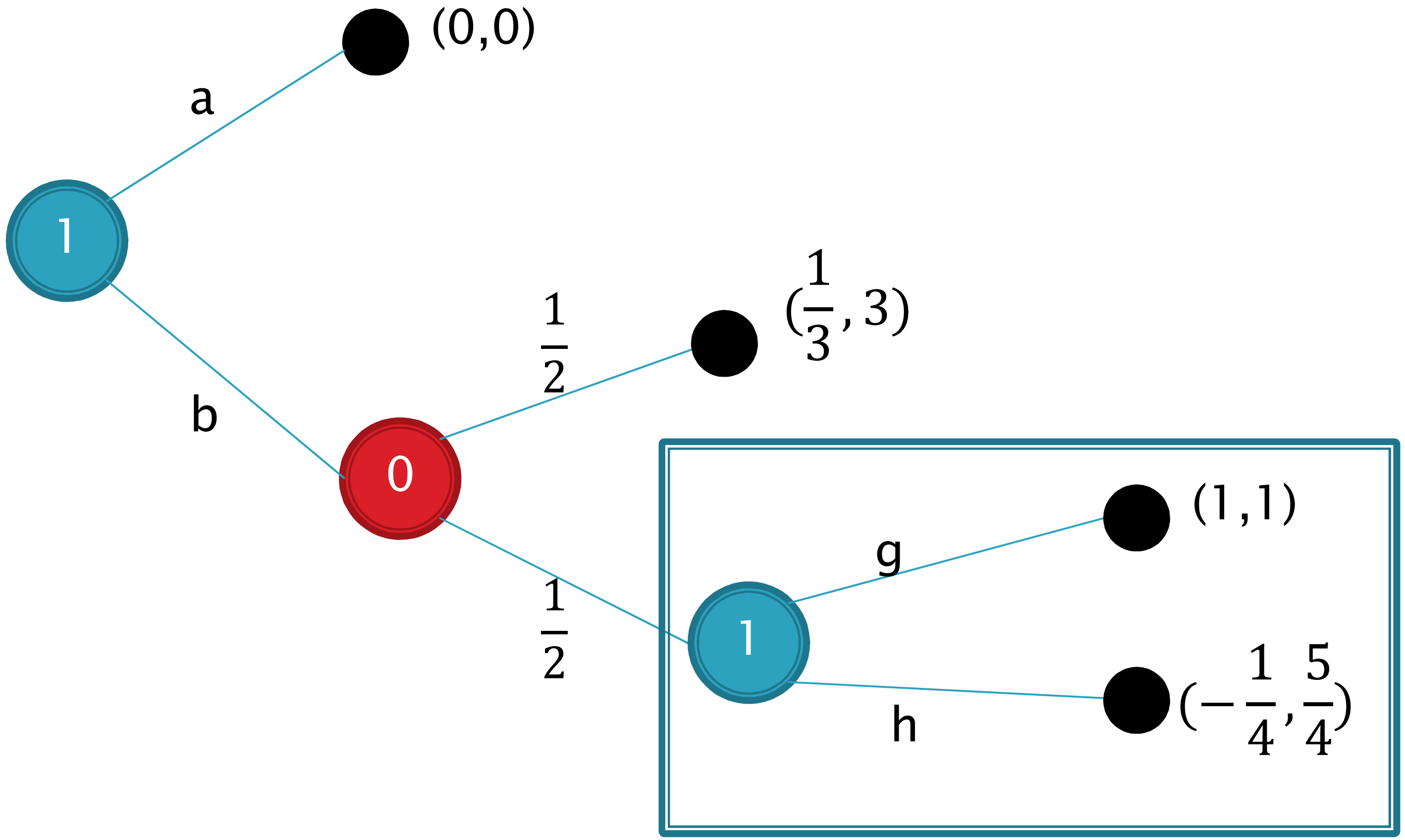
$s_{II} = \{e\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



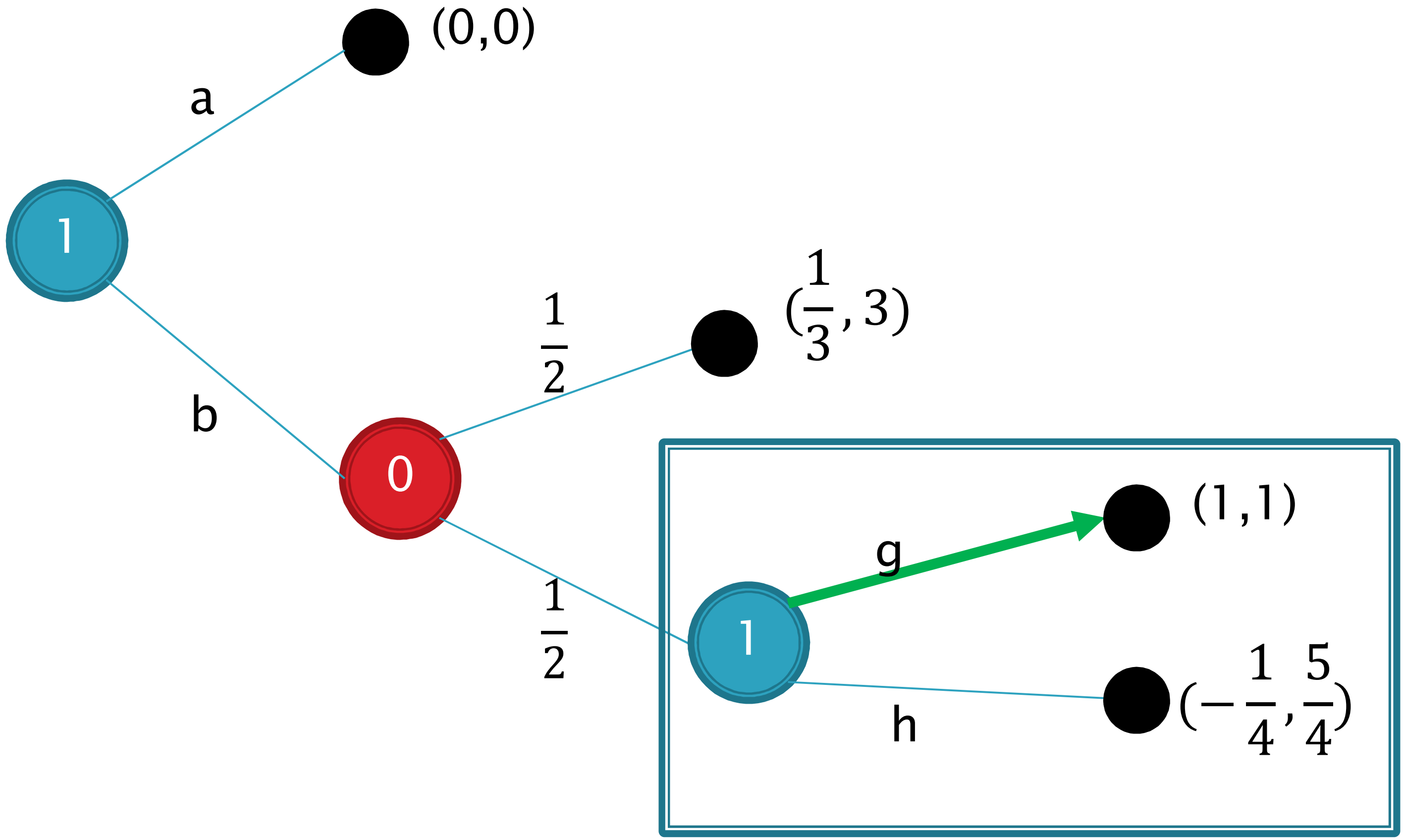
$s_{II} = \{e\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



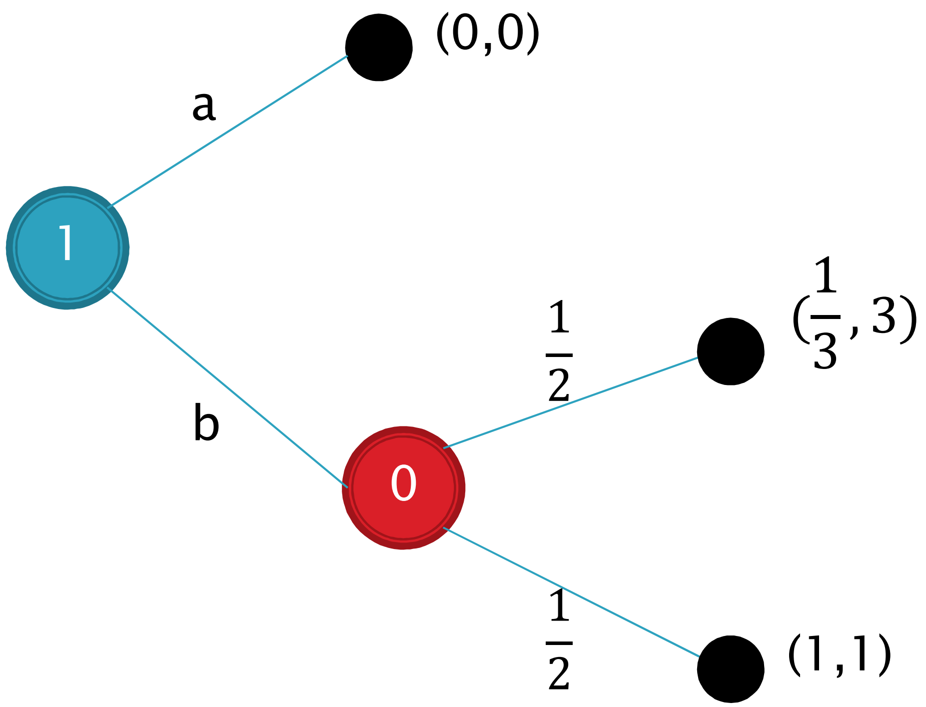
$s_{II} = \{e\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



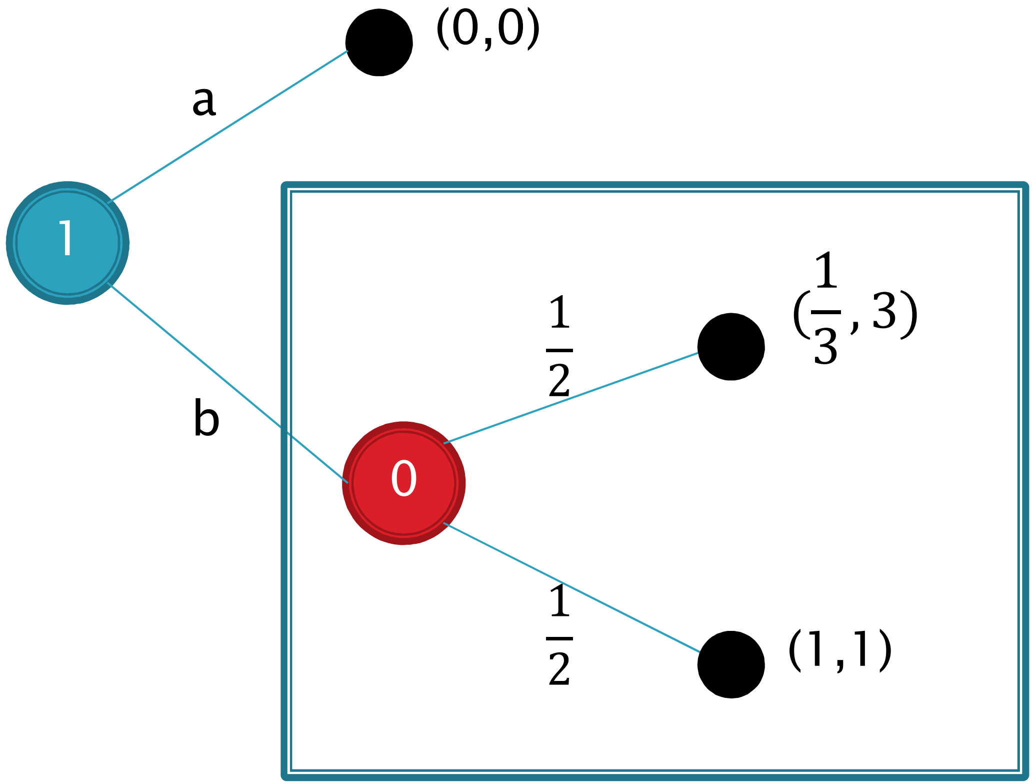
$$s_{II} = \{e\}$$
$$s_I = \{g\}$$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



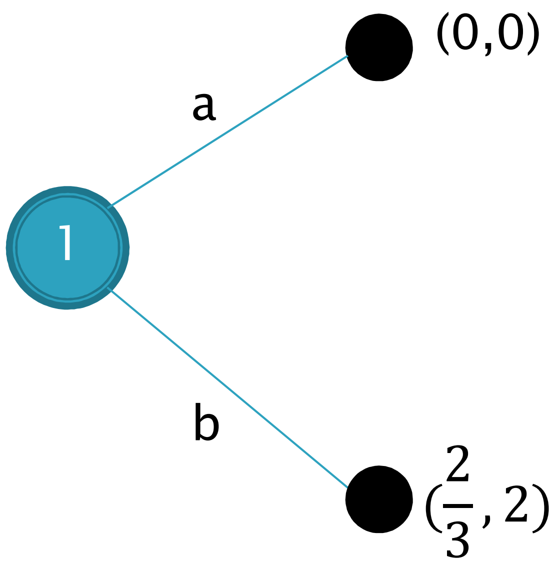
$s_{II} = \{e\}$
$s_I = \{g\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



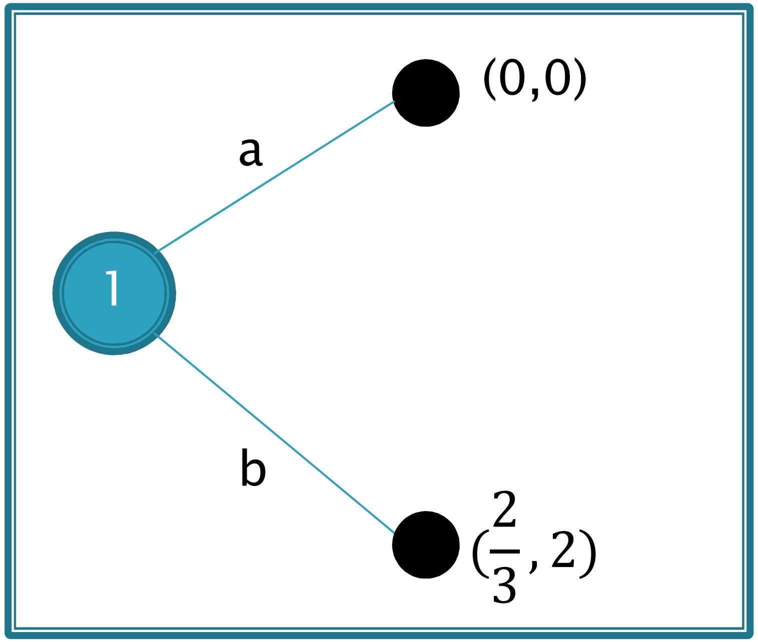
$s_{II} = \{e\}$
$s_I = \{g\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



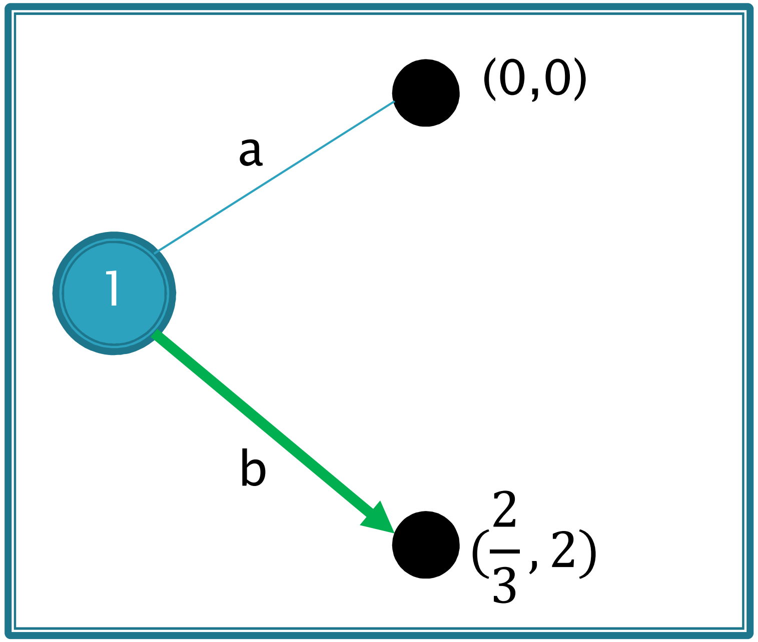
$s_{II} = \{e\}$
$s_I = \{g\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



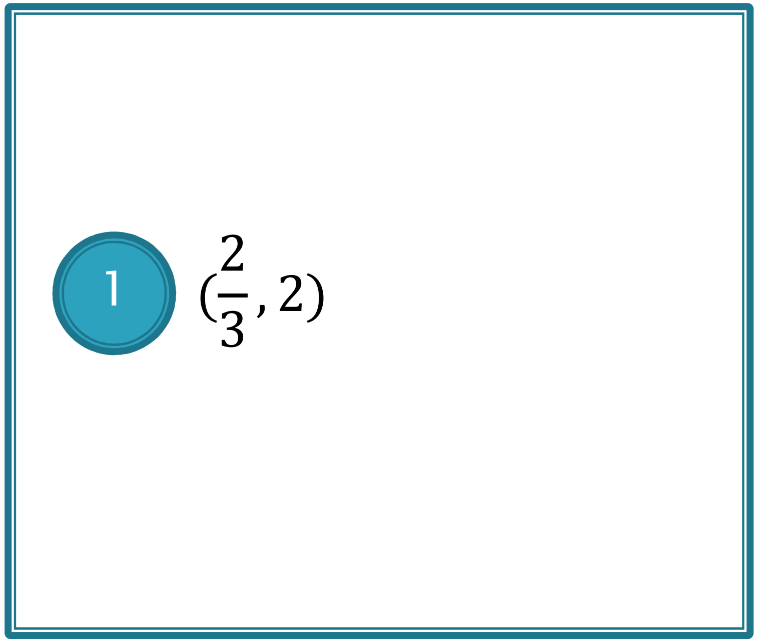
$s_{II} = \{e\}$
$s_I = \{g\}$

מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



$$s_{II} = \{e\}$$
$$s_I = \{g, b\}$$

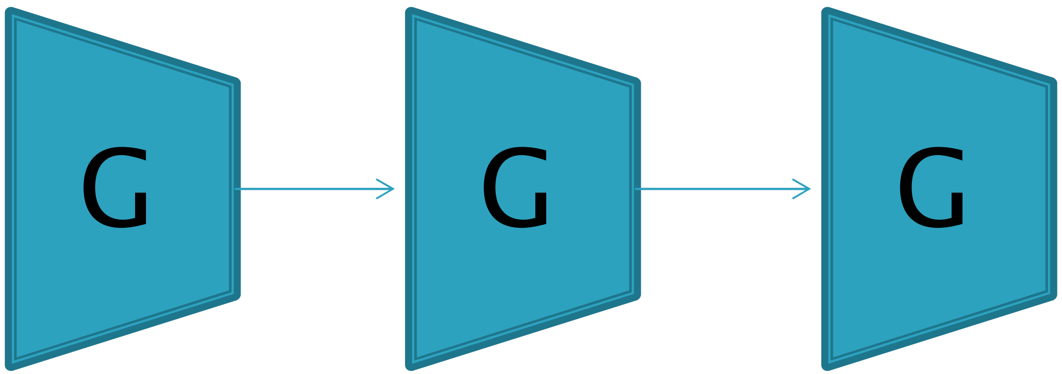
מהלכי גורל – אינדוקציה לאחור



$$s_{II} = \{e\}$$
$$s_I = \{g, b\}$$

משחקים עם חזרות

- כבר הערנו בעבר שכאשר משחקים במשחק אסטרטגי שוב ושוב, תהיה למשחק נטייה להתכנס לאחד משיוויי משקל נאש של המשחק האסטרטגי.
- מצד שני, ניתן להתייחס לחזרות על משחק מסוים כמשחק גדול יותר בצורה רחבה.
- בצורה פשטנית ניתן להציג משחק עם (3) חזרות בצורה הבאה:



משחקים עם חזרות

- השאלה המרכזית בחקר משחקים עם חזרות היא האם קיים שיווי משקל משוכלל של כל המשחק, שנותן פיתרון יותר טוב עבור השחקנים.
- נקרא למשחק שאנחנו חוזרים עליו **משחקון**, ונוכל להתייחס למשחקון 1, משחקון 2, משחקון 3 לפי מספר החזרה על המשחקון.
- הדוגמה המרכזית שנדון בה היא דילמת האסיר.

דילמת האסיר – מספר סופי של חזרות

שחקן 1 \ שחקן 2	A	B
A	0,0	3,−1
B	−1,3	2,2

- אנחנו יודעים שכאשר משחקים במשחק פעם אחת, שני השחקנים יבחרו ב A, כלומר **לרמות**, למרות שלשניהם עדיף **לשתף פעולה** ולבחור ב B.
- מה קורה כאשר יש מספר סופי של חזרות?

דילמת האסיר – מספר סופי של חזרות

- מסתבר שעבור מספר סופי של חזרות, שום דבר לא משתנה. כדאי לשני השחקנים לשחק (B,B) שוב ושוב.
- מדוע?
- ניתן לבצע אינדוקציה לאחור מהמשחקון האחרון, אבל המשחקון האחרון הוא בדיוק דילמת האסיר, ועדיף לשני השחקנים לרמות.
- כשנגלגל אחורה את המשחק, נקבל שהמשחקון הלפני אחרון הוא שוב דילמת האסיר, וכך הלאה.
- אם כך צירוף האסטרטגיות של לשחק קבוע B הוא שיווי המשקל המשוכלל היחיד במשחק.
- נשים לב שזה לא קריטי כאן שהתשלום של (B,B) הוא (0,0). כל תשלום (n,n) של לרמות היא מתגלגל אחורה למשחק דילמת האסיר, אבל עם ערכים שונים.

תופעת המחזור האחרון

- Last period/end effect
- תופעה זאת מתרחשת כאשר יש ידיעה שיש למשחק סוף מוגדר, וידיעה זאת גורמת לחוסר שיתוף פעולה או רמאות.
- דוגמאות לתופעה זו:
  - ברווז צולע (lame duck) – לראש ממשלה לקראת סוף כהונתו (כאשר ידוע שלא יתמודד שוב) קשה מאד לבצע כל מהלך פוליטי.
  - עובד לקראת פרישה – העובד נעשה פחות פרודוקטיבי כיוון שהוא יודע שעוד מעט הוא פורש/המעסיק פחות מתגמל את העובד.
  - חברות לקראת סיום חוזה שיתוף פעולה.

דוגמה: מקל וגזר

- נתבונן במשחקון הבא:

	A	B	C
A	4,4	0,5	0,0
B	5,0	1,1	0,0
C	0,0	0,0	3,3

- שני השחקנים היו מעדיפים את צירוף האסטרטגיות (A,A), אבל זהו לא שיווי משקל.
- שיוויי המשקל היחידים במשחק הם (B,B) ו (C,C).

דוגמה: מקל וגזר

- נשחק את המשחקון הזה פעמיים, ונגדיר את האסטרטגיה s הבאה:
- במשחקון הראשון לבחור A
- במשחקון השני:
  - לבחור C אם במשחקון הראשון היה (A,A)
  - לבחור B אחרת
- מדוע זאת אסטרטגיה?
- נסתכל על צירוף האסטרטגיות (s,s).
- האם זה שיווי משקל משוכלל?
- נראה שכן.

דוגמה: מקל וגזר

- כאשר שני השחקנים משחקים (s,s) אזי התשלום ששני השחקנים יקבלו הוא
- $u_i(A,A) + u_i(C,C) = 4 + 3 = 7$
- נבדוק מה קורה כאשר שחקן 1 מחליט לרמות, ולשחק B במשחקון הראשון - זאת סטייה מהשיווי משקל.
- במקרה זה במשחקון השני שחקן 2 יפעל לפי אסטרטגיה s ויבחר B, ואז לשחקן 1 אין ברירה אלא לשחק גם B.
- נקבל:
- $u_i(B,A) + u_i(B,B) = 5 + 1 = 6$
- לכן הסטייה הזאת אינה כדאית, וקל לראות שכל סטייה אחרת גם אינה כדאית.
- שיווי משקל זה הוא גם שיווי משקל משוכלל, כיוון שבכל מצב אנחנו משחקים בשיווי משקל במשחקון השני.

מסקנות ממשחק המקל והגזר

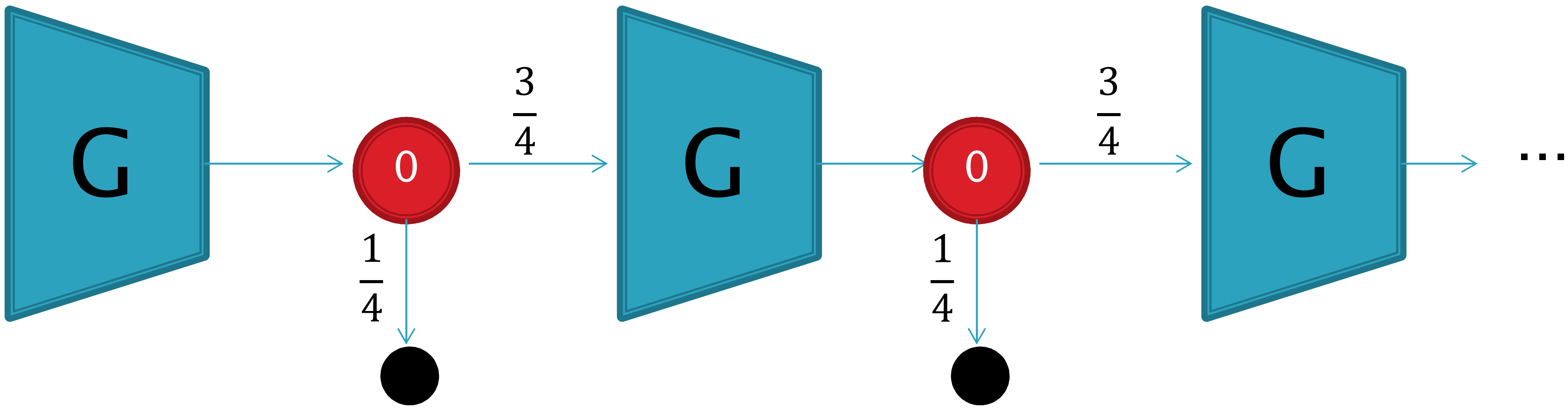
- במשחק הזה הגזר הוא אסטרטגיה (C,C) ואילו המקל הוא (B,B).
- הסיבה שיש לנו שיווי משקל שמאפשר שיתוף פעולה בין השחקנים הינה שהפיתוי לרמות עכשיו (***היום***) קטן מהרווחים שנרוויח אחר כך (***מחר***) אם נשתף פעולה היום.
- מקל מחר – גזר מחר < פיתוי היום
- 1 - 3 5-4
- 2 < 1

מקל וגזר: אמינות שיווי המשקל

- שאלה: מדוע שהשחקנים לא ישחקו (C,C) גם לאחר הרמאות? במצב אמיתי, שחקן 1 היה יכול לרמות, ואז לבוא לשחקן 2 ולהכריז שהוא הולך לשחק C במשחקון השני, ובכך לאלץ את שחקן 2 לשחק C גם כן.
- אנחנו רואים שמימוש האסטרטגיה תלוי בחוסר היכולת של השחקנים לתקשר במהלך המשחק: *no renegotiation*.
- דוגמה לבעיתיות של אפשרות משא ומתן מחדש הן:
  - תספורות טייקונים
  - משבר הנדלן בארה"ב.

דילמת האסיר: ללא סיום ידוע מראש

- ראינו ששיתוף פעולה בדילמת האסיר עם חזרות נכשל בגלל תופעת המחזור האחרון.
- נתקן את המשחק ע"י הוספת חוסר ודאות למשחק.
  לדוגמה:



אסטרטגית הדק הקל (grim trigger)

- נגדיר את האסטרטגיה הבאה עבור משחק דילמת האסיר הנ"ל, כאשר ההסתברות להמשיך למשחקון הבא היא δ.
- **שחק B עד שהשחקן השני משחק A, ואז שחק A לנצח** (או עד שהמשחק מסתיים).
- נבצע את ההשוואה של פיתוי היום לעומת רווח מחר כמו במשחק הקודם:
- הרווח מרמאות היום הוא $3-2=1$
- הרווח מחר (משיתוף פעולה היום) הוא $2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \cdots$
- סכימת הטור הגיאומטרי הזה נותנת $\frac{2\delta}{1-\delta}$.

אסטרטגית הדק קל

- ע"מ שהאסטרטגיה הזאת תהיה כדאית צריך שיתקיים
- $1 < \frac{2\delta}{1-\delta}$
- כלומר:
- $\delta > \frac{1}{3}$
- לכן אנחנו רואים שאסטרטגית grim trigger עובדת (כלומר היא שיווי משקל משוכלל) כאשר ההסתברות להמשכיות המשחק יחסית נמוכה.

אסטרטגית ענישה במחזור אחד

- אסטרטגיה אחרת שעובדת היא האסטרטגיה הבאה:
- במחזור 1 שחק B
- במחזור i:
  - שחק B אם במחזור $i-1$ התוצאה היתה (A,A) או (B,B).
  - שחק A אחרת (ענישה על רמאות).
- ניתוח האסטרטגיות:
- רווח מרמאות **היום**: 3–2=1
- רווח **מחר** משיתוף פעולה היום:
- $(2\delta + 2\delta^2 + \cdots) - (0\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \cdots) = 2\delta$
- לכן מספיק שיתקיים $\delta > \frac{1}{2}$, כדי שאסטרטגיה זו תהיה יעילה.
- רואים שככל שהעונש פחות קשה, צריך שההסתברות להמשכיות המשחק תהיה גדולה יותר.