אינפי 4 תרגול 2

30 במרץ 2015

הגדרה:

אינטגרל קווי (נקרא גם אינטגרל מסילתי או אינטגרל לאורך עקומה) מסוג ראשון של פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ לאורך עקומה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ נתון ע"י הנוסחה:

$$\int\limits_{\gamma} f ds = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t)) \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

הצורך באינטגרל קווי עולה בעת ניתוח גדלים הקשורים בתנועה במסלול שאינו ישר, או בתכונות פיזיקליות של גוף עקום, כגון חוט דק.

בדרך זו ניתן לחשב גדלים כדוגמת אורך, מסה, או מטען חשמלי.

האינטגרל הקווי מחשב כוח הפועל על גוף המיוצג על ידי עקום, או עבודה של כוח המניע מסה לאורכו, כמו גם התנהגות של שדות פיזיקליים (למשל, שדה חשמלי) על פני מסלולים שונים.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. של הפונקציה $f(x,y)=x+y$ לאורך משולש שקודקודיו הם $(0,0),(1,0),(0,1)$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פרמטריזציה לכל אחת מהצלעות:

$$\gamma_1(t)=(0,0)(1-t)+(1,0)t=(t,0)$$

$$\gamma_2(t) = (0,1)(1-t) + (1,0)t = (t, 1-t)$$

$$\gamma_3(t) = (0,0)(1-t) + (0,1)t = (0,t)$$

כאשר בכל אחת מהעקומות $t \in [0,1]$.

נקבל $\left\|\gamma_1'(t)\right\| = \left\|\gamma_3'(t)\right\| = 1, \left\|\gamma_2'(t)\right\| = \sqrt{2}$ ולכן:

$$\int_\gamma f ds = \int_0^1 f(\gamma_1(t))dt + \int_0^1 f(\gamma_2(t))\sqrt{2}dt + \int_0^1 f(\gamma_3(t))dt =$$

$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 \sqrt{2}dt + \int_0^1 tdt = \sqrt{2}t + 2 \cdot \frac{t^2}{2}|_0^1 = \sqrt{2} + 1$$

2. של הפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ לאורך קטע שקצוותיו $(0,0), (1,2)$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פרמטריזציה של הקטע:

$$\gamma(t) = (t, 2t), t \in [0,1]$$

מתקיים: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{5}$.

לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int_\gamma f ds = \int_0^1 f(t,2t)\sqrt{5}dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{t^2+4t^2+4}}dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{4}{5}}}dt =$$

$$= \ln(t + \sqrt{t^2+\frac{4}{5}})|_0^1 = \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

3. של הפונקציה $f(x,y)=y$ לאורך קשת של ציקלואידה:

$$\gamma(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t)),t\in[0,2\pi]$$

<u>פתרון:</u>

מהגדרת העקומה נקבל:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{(a-a\cos t)^2+(a\sin t)^2}=a\sqrt{2-2\cos t}=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\int\limits_{\gamma}fds=\int\limits_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}dt=\sqrt{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

לפי נוסחת מחצית זווית: $\sin\frac{t}{2}=\sqrt{1-\cos t}$ ונקבל:

$$4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=4a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt=4a^2(\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt-\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt$$

נשתמש בהצבה: $\cos\frac{t}{2}=p$ ואז $dp=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$ ונקבל:

$$=4a^2(-2\cos\frac{t}{2})|_0^{2\pi}+8a^2\int\limits_{-1}^{1}p^2dp=16a^2+\frac{8a^2}{3}p^3|_{-1}^{1}=\frac{32a^2}{3}$$

תבניות דיפרנציאליות:

תבנית דיפרנציאלית מסדר 1 על קבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^n$ היא פונקציה $\omega:D\to Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ כלומר לכל וקטור $x\in D$, $\omega(x)$ היא העתקה ליניארית מ$-\mathbb{R}^n$ ל$-\mathbb{R}$.

עם קצת רצון, קצת אלגברה ליניארית וקצת יכולת נקבל שכל תבנית דיפרנציאלית אפשר להציג כך:

$$\omega(x)=w_1(x)dx_1+\dots w_n(x)dx_n$$

כאשר $dx_k(v) = v_k$ כלומר הטלה לרכיב המתאים.

לדוגמה:

באינפי 3 זכור לטוב ראינו שאם $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה שמוגדרת על קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ודיפרנציאבילית, אז הדיפרנציאל שלה בנקודה x, df_x, הוא העתקה ליניארית שמוגדרת על ידי:

$$df_x(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(v) + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(v)$$

מעט הגדרות:

1. תבנית דיפרנציאלית נקראת **מדוייקת** אם קיימת f כך ש: $\omega = df$ (כלומר התבנית היא דיפרנציאל של פונקציה כלשהי).

2. תבנית דיפרנציאלית $\omega(x) = w_1(x)dx_1 + \ldots w_n(x)dx_n$ היא C^p (כלומר גזירה ברציפות p פעמים) אם כל אחת מהפונקציות w_k היא C^p.

3. תבנית דיפרנציאלית $\omega(x) = w_1(x)dx_1 + \ldots w_n(x)dx_n$ שהיא C^1 ומקיימת לכל $1 \leq i, j \leq n$ את התנאי:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

נקראת **סגורה**.

4. עבור קבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^n$, **שדה וקטורי** בקבוצה D הוא פונקציה וקטורית:

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$$

5. שדה וקטורי הוא **משמר** אם קיימת פונקציה $F : D \to \mathbb{R}$ עבורה: $f = \nabla F$. הפונקציה F נקראת **הפוטנציאל** של f בקבוצה D.

שימו לב לקשר בין המושגים; כאשר פונקציה וקטורית $f = (f_1, \ldots, f_n)$ מתאימה לתבנית דיפרנציאלית:

$$\omega(x) = f_1(x)dx_1 + \ldots f_n(x)dx_n$$

אז התבנית הדיפרנציאלית היא מדוייקת אם ורק אם הפונקציה היא שדה משמר.