תזכורת:

כלל המקבילית

$$2(||u||^2 + ||w||^2) = ||v + w||^2 + ||v - w||^2$$

משפט

אם $||\ \ ||$ מושרית ממ״פ $<,>$, אזי כלל המקבילית מתקיים.

הערה

אם $||\ \ ||$ מתקיימת תנאי המקבילית, אזי $||\ \ ||$ זו מושרית ממ״פ.

תרגיל

להוכיח את ההערה.
רמז: להשתמש בזהות פולארית.
(הוכחה של כלל מקבילית בגיאומטריה מישורית)

$$\mathfrak{D}^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cos\alpha$$
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cos\beta$$
$$\alpha + \beta = 180$$
$$\cos(\alpha) = \cos(180 - \beta) = -\cos(\beta)$$
$$\mathfrak{D}^2 = a^2 + \mathrm{b}^2 + 2 \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \cdot \cos(\beta)$$
$$+d^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\beta)$$

$$\mathfrak{D}^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

■

זוויות

נניח $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

יהי $\mathbb{V}_{/\mathbb{F}}$ ממ״פ. מתקיים, לכל $v, w \in \mathbb{V}$, אי שוויון קב״ש:

$$| < v,w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$$

באופן שקול, מתקיים:

$$-||v|| \cdot ||w|| \leq < v,w > \leq ||v|| \cdot ||w||$$

נניח ש-$v,w \neq \vec{0}$.

$$-1 \leq \frac{< v,w >}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$$

הגדרה

לכל $v,w \neq \vec{0}$ נגדיר $\cos\phi = \frac{<v,w>}{||v||\cdot||w||}$

הגדרה

אם $< v,w >= 0$, אומרים ש-v ניצב (**אורתוגונאלי**) ל-w.

הערה

משתמשים באותה ההגדרה גם במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, כאשר אין לנו הגדרה של זווית.

סימון

$v \perp w$

טענה

$0 \perp w$

אם $w \perp v$ אזי $w \perp v$.

אם לכל $w \perp v$, אזי $\beta w \perp \alpha v$ לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

הוכחה

$$< w,v > = \overline{< v,w >} = \bar{0} = 0$$
$$< \alpha v, \beta w > = \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot < v,w > = \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot 0 = 0$$

הגדרה

יהי $\mathbb{V}_{/\mathbb{F}}$, ממייפ. תהי $S \subset \mathbb{V}$, אומרים ש- S, היא קבוצה אורתוגונאלית אם לכל $v,w, \in S$, כך ש- $w \neq v$, מתקיים $w \perp v$.

הערה

אם $S=\{v\}$, קבוצה בת וקטור אחד, אזי לפי ההגדרה אומרים שהקבוצה אורתוגונאלית.

הגדרה

אומרים ש- $\vec{0}\neq v\in\mathbb{V}$, וקטור נורמאלי (או וקטור יחידה) אם $||v||=1$.

הגדרה

אומרים ש- $S\subset\mathbb{V}$ קבוצה אורתונורמאלית אם S קבוצה אורתוגונאלית ובנוסף כל הוקטורים של S הם נורמאליים.

הגדרה

בסיס אורתוגונאלי B של $\mathbb{V}$ זה בסיס שהוא גם קבוצה אורתוגונאלית.

הגדרה

בסיס B אורתונורמאלי של $\mathbb{V}$ זה בסיס שהוא גם קבוצה אורתונורמאלית .

משפט

תהי S קבוצה אורתוגונאלית. נניח $\vec{0}\notin S$. אזי S בת"ל.

הוכחה

אם $S=\{v\}$ קבוצה בת וקטור אחד, $v\neq\vec{0}$, אזי S בת"ל. נניח שב- S יש יותר מווקטור אחד.

נניח שקיימים $v_1,\cdots,v_k$, סקלרים $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$, כך שמתקיים:

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k=0$$

נוכיח ש-

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_k$$

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k=0$$

נכפול (במובן של מכפלה פנימית) בווקטור v_1. נקבל:

$$<\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k,v_1>=<0,v_1>$$

$$\alpha_1<v_1,v_1>+\underbrace{\cdots+\alpha_k<v_k,v_1>}_{\text{=0 לפי ההנחה על אורתוגונליות}}=0$$

$$< v_1, v_1 > \neq 0$$

כי $v_1 \neq 0$. לכן $\alpha_1 = 0$. באופן דומה, מוכיחים $\alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

■

מסקנה

כל קבוצה אורתונורמאלית היא בת"ל.

הוכחה

בקבוצה אורתונורמאלית אין וקטור אפס לכן אפשר להשתמש במשפט הקודם.

הגדרה

יהי $\mathbb{V}_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית, $n = \dim(V)$. יהי $\mathrm{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ בסיס של $\mathbb{V}$.

נגדיר:

$$G_B = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < v_n, v_1 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{pmatrix}$$

קוראים ל-G_B מטריצת **גראם (Gram)** של $<,>$ יחסית לבסיס B.

הערה

בעזרת G_B אפשר לחשב $< v, w >$ לכל $< v, w >$. לכל $v, w \in \mathbb{V}$. נתבונן בהצגות של v, w יחסית ל-B:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$[w]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

נחשב $< v, w >$:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

$$< v, w >= < \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{\beta_j} \underbrace{< v_i, v_j >}_{= g_{i,j}}$$

ניתן לרשום את התוצאה בצורה מקוצרת:

$$\boxed{< v, w > = [v]_B^t G_B \overline{[w]_B}}$$

הערה

אם B בסיס $C_B = I_n$,

$$< v, w >= [v]_B^t \overline{[w]_B} = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n}$$

= נוסחא למכפלה סטנדרטית ב-$\mathbb{F}^n$ יחסית לבסיס סטנדרטי.

שינוי בסיס

משפט

יהי $\mathbb{V}_{/\mathbb{F}}$ ממ"פ. יהיו $B, \tilde{B}$ בסיסים של $\mathbb{V}$. תהיו $C_B, C_{\tilde{B}}$ מטריצות גראם, אזי:

$$C_{\tilde{B}} = P^t G_B \bar{P}$$

כש-P מטריצת המעבר מ-B ל-$\tilde{B}$.

הוכחה

לפי ההגדרה של P,

$$[v]_B = P[v]_{\tilde{B}}$$
$$[w]_B = P[w]_{\tilde{B}}$$

לכן,

$$< v, w > = [v]_B^t G_B \overline{[w]_B} = (P[v]_{\tilde{B}})^t G_B \overline{(P[w]_{\tilde{B}})} = [v]_{\tilde{B}}^t P^t G_B \bar{P} \overline{[w]_{\tilde{B}}}$$

מצד שני,

$$< v, w > = [v]_{\tilde{B}}^t G_{\tilde{B}} \overline{[w]_{\tilde{B}}}$$

ניקח $v = \tilde{v_i}, w = \tilde{w_j}$

נקבל:

$$[v]_{\tilde{B}} = e_i$$
$$[w]_{\tilde{B}} = e_j$$

נקבל את האיברים הנמצאים במקום (i, j) שלמטריצות $P^t G_B \bar{P}$, $G_{\tilde{B}}$ הם שווים, לכן מטריצות שוות.

■