

# אלגברה לינארית 2 | לכסון, שילוש וצורת ז'ורדן

מאת יונתן סמידוברסקי

## תזכורת

הגדרות

- בעבור מטריצות ריבועיות, תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$
- $\lambda \in \mathbb{F}$  ייקרא **ערך עצמי** של  $A$  אם קיים  $v \in \mathbb{F}^n$  כן  $0 \neq v$  ש  $Av = \lambda v$
- $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$  ייקרא **ווקטור עצמי** אם קיים  $\lambda \in \mathbb{F}$  כן  $Av = \lambda v$
- נסמן את אוסף הערכים העצמיים של  $A$  כך:  $\sigma(A)$
- בעבור אופרטורים לינאריים, תהי  $T: V \rightarrow V$
- $\lambda \in \mathbb{F}$  ייקרא **ערך עצמי** של  $T$  אם קיים  $v \in \mathbb{F}^n$  כן  $0 \neq v$  ש  $Tv = \lambda v$
- $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$  ייקרא **ווקטור עצמי** אם קיים  $\lambda \in \mathbb{F}$  כן  $Tv = \lambda v$
- נסמן את אוסף הערכים העצמיים של  $T$  כך:  $\sigma(T)$
- **כללים לחישוב ערכים ווקטורים עצמיים:**
- יהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור לינארי, ו- $B$  בסיס ל- $V$
- נסמן  $A = [T]_B$ , אזי  $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda \in \sigma(T)$
- נסמן פולינום אופייני  $p_A(x) = \det(xI - A)$ , שורשיו הם הערכים העצמיים של  $A$
- **המרחב העצמי** של הערך העצמי  $\lambda$  הוא  $V_\lambda := N(A - \lambda I)$  והוא מהווה את מרחב הווקטורים העצמיים המתאימים לערך העצמי  $\lambda$ .
- **ריבוי אלגברי**  $k_\lambda$  הוא החזקה של  $(x - \lambda)$  בפולינום האופייני
- **ריבוי גיאומטרי**  $m_\lambda$  הוא המימד של המרחב העצמי המתאים  $\dim(N(A - \lambda I))$
- **פולינום מינימלי** הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית שמאפס את  $A$  (כל גורם אי פריק של הפולינום האופייני מופיע בו)
- $T$  תיקרא **נורמלית** אם  $TT^* = T^*T$
- $A$  ייקרא **נורמלי** אם  $AA^* = A^*A$
- בסיס הוא **אורתונורמלי** אם כל שני איברים בו מאונכים, ואורכם (הנורמה) היא 1 (לפי המכפלה הפנימית)
- מטריצה היא **אוניטרית** אם  $AA^* = A^*A = I$

# לכסון

## לכסון מטריצות ריבועיות ואופרטורים לינאריים

הגדרה-

$A$  תיקרא ניתנת ללכסון אם קיימת  $D$  אלכסונית דומה לה, כלומר קיימת  $P$  הפיכה כך ש  $P^{-1}AP = D$   
 $T: V \rightarrow V$  תקרא ניתנת ללכסון אם קיים בסיס  $B$  של  $V$  שעבורו  $[T]_B = D$  אלכסונית  $([T]_B = [I]_C^B [T]_C [I]_B^C)$

קריטריונים ללכסון

- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה  $\iff$  קיים ל  $\mathbb{F}^n$  בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של  $A$
- $T: V \rightarrow V$  לכסינה  $\iff$  קיים ל  $V$  בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של  $A$
- נניח ש  $p_{A/T}(x)$  מתפרק לגורמים לינאריים, אזי  $A/T$  ניתנת ללכסון  $\iff$  לכל  $\lambda \in \sigma(A/T)$  מתקיים שהריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים.
- $A/T$  ניתנת ללכסון  $\iff$  הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים שונים
- אם למטריצה או העתקה יש  $n$  ערכים עצמיים שונים- היא ניתנת ללכסון
- אופרטור הוא לכסין  $\iff$  ניתן לפרק את  $V$  לסכום ישר של תתי המרחבים העצמיים  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$

## אלגוריתם ללכסון

האלגוריתם למציאת  $P$  המלכסנת ו  $D$  האלכסונית

\* אם מדובר באופרטור, ניקח בסיס (עדיף הסטנדרטי) ונסמן  $A = [T]_E$

(1 מוצאים ערכים עצמיים של המטריצה  $A$  (הפולינום האופייני)

(2 מוצאים בסיסים למרחבים העצמיים  $B_{V_{\lambda_1}}, \dots, B_{V_{\lambda_m}}$

(שימו לב שבשלב זה אם יצאו ריבויים גיאומטריים שונים מהאלגבריים היא לא ניתנת ללכסון)

(3

\* אם מדובר במטריצה, מגדירים את עמודות  $P$  להיות הוקטורים העצמיים

\* אם מדובר באופרטור, מאחדים את הבסיסים  $B := B_{V_{\lambda_1}} \cup \dots \cup B_{V_{\lambda_m}}$

וזוהו הבסיס או המטריצה המלכסנת

(4 בעמודה  $i$  של  $D$  יופיע הערך העצמי המתאים לוקטור העצמי בעמודה  $i$  הוא בבסיס הסדור  $B$

## דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ כאשר } Tv = Av, T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

(1

לצורך נוחות, ניקח בסיס סטנדרטי  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  ואז  $[T]_E = A$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -7 & x-3 & -2 \\ -11 & -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1) \cdot \det \begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1)(x-1)(x-5)$$

$$V_{-1} = N(A + I) = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = N(A - I) = N \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ 11 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_5 = N(A - 5I) = N \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(P = [I]_B^E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ בעצם } , [T]_B = [I]_E^B [T]_E [I]_B^E \text{ נשים לב שבהגדרה } B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ (3)}$$

$$D = [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ (4)}$$

## מוטיבציה ללכסון

### מוטיבציה ללכסון

העלאת מטריצה בחזקה גבוהה היא פעולה יחסית קשה ומסורבלת ודורשת המון חישובים,

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \text{ ש } P \text{ הפיכה כך ש}$$

אזי בעצם  $A = PDP^{-1}$

ואם נעלה את שני הצדדים בחזקת  $n$ , נקבל

$$A^n = (PDP^{-1}) \cdot \dots \cdot (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

### דוגמה - סדרת פיבונאצ'י

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \text{ כלומר: } a_n := \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{else} \end{cases} \text{ סדרת פיבונאצ'י מוגדרת כך}$$

ניעזר בלכסון מטריצות כדי למצוא את האיבר במקום  $a_n$  במפורש נשים לב

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ , מלכסון מתקבל

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## לכסון אוניטרי/אורתוגנלי

### הגדרה

- יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור על ממ"פ, נאמר ש  $T$  ניתן ללכסון אוניטרי אם קיים בסיס אורתונורמלי  $B$  עבור  $V$  כך ש  $[T]_B$  אלכסונית
- תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית, נאמר  $A$  ניתנת ללכסון אוניטרי אם קיימת  $P$  אוניטרית כך ש  $P^{-1}AP$  אלכסונית

### הערות

- \* אורתוגנלית היא אוניטרית מעל  $R$
- \* מטריצה היא אוניטרית אם ורק אם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי, זה מסביר את הקשר בין מטריצות ואופרטורים לינאריים בעזרת המטריצה המייצגת.

### משפט הלכסון האוניטרי

- יהי  $T$  אופרטור לינארי על ממ"פ אז
- $T$  לכסין אוניטרי  $\iff p_T(x)$  מל"ל  $T$  נורמלית
- תהי  $A$  מטריצה ריבועית על ממ"פ אז
- $A$  לכסינה אוניטרית  $\iff p_A(x)$  מל"ל  $A$  נורמלית

### האלגוריתם

- (1) מלכסנים רגיל
- (2) מפעילים גראם שמידט על הבסיס או על עמודות  $P$  לקבלת בסיס אורתונורמלי או מטריצה אוניטרית

הקשר בין אופרטורים ומטריצות לכסינות אוניטרית  
 לכל אופרטור לינארי, אפשר לקחת מטריצה מייצגת שלו, ללכסן.  
 מקבלים  $P$  מלכסנת, עושים גראם שמידט על עמודותיה ואז עמודותיה מהווים את הבסיס.

## דוגמה

נישאר עם הדוגמה ממקודם,  $D$  תישאר זהה לחלוטין!

הבסיס שלנו הוא  $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  מתחילים עם גראם שמידט

$$w_1 = b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -4/15 \\ 17/15 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle b_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 2/11 \\ 2/11 \end{pmatrix}$$

$$w'_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}, w'_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{330}}{165} \\ \frac{17\sqrt{330}}{330} \\ \frac{-\sqrt{330}}{66} \end{pmatrix}, w'_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \end{pmatrix} \text{ מנרמלים לקבלת}$$

$$(כעת, אם היינו עובדים עם מטריצות אז  $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$  היא אוניטרית)$$

# שילוש

## שילוש מטריצות ריבועיות ואופרטורים לינאריים

הגדרה-

$A$  תיקרא ניתנת לשילוש אם קיימת  $D$  משולשית דומה לה, כלומר קיימת  $P$  הפיכה כך ש  $P^{-1}AP = D$   
 $T : V \rightarrow V$  תקרא ניתנת לשילוש אם קיים  $B$  בסיס  $V$  שעבורו  $[T]_B = D$  משולשית  $([T]_B = [I]_C^B [T]_C [I]_B^C)$

קריטריון לשילוש

-  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ניתנת לשילוש  $\iff p_A(x) \iff$  מתפרק לגורמים לינאריים  
-  $T : V \rightarrow V$  ניתנת לשילוש  $\iff p_T(x) \iff$  מתפרק לגורמים לינאריים  
מסקנה חשובה- מעל  $\mathbb{C}$  כל מטריצה ניתנת לשילוש

## אלגוריתם לשילוש

האלגוריתם למציאת  $P$  המשלשת  $D$  המשולשית

\* אם מדובר באופרטור, ניקח בסיס (עדיף הסטנדרטי) ונסמן  $A = [T]_E$ , נעבוד איתו ובסוף נעשה התאמות.

(1) מוצאים ערכים עצמיים של המטריצה  $A$  (הפולינום האופייני, אם לא מל"ל- לא ניתנת לשילוש)

(2) מוצאים בסיסים למרחבים העצמיים  $B_{V_{\lambda_1}}, \dots, B_{V_{\lambda_m}}$

(3) כעת לוקחים בסיס  $B = \{v_1, \dots, v_k\}$  המורכב מ"ע ומשלימים לבסיס  $B = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$

\* נכתוב את  $P$  כך שעמודותיה יהיו וקטורי הבסיס

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * & \dots \\ 0 & . & * & * & * & \dots \\ 0 & 0 & . & * & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{כעת מתקיים כי}$$

כך ש  $C$  הינה מטריצה, ואם נשלש אותה (רקורסיבית) נקבל סך הכל מטריצה משולשית,

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = Q' = I_k \oplus Q \quad \text{ואז } C \text{ את } Q \text{ המשלשת את } C$$

(5) נקבל ש

$$(Q'^{-1}P^{-1})A(PQ')$$

הינה משולשית, ואם מדובר באופרטור לוקחים את עמודות  $PQ$  להיות הבסיס.

## דוגמה (מתוך תרגול עם אריאל ויצמן)

(1) נסתכל על המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

(2)

$$V_1 = N \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \dots = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_2 = N \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \dots = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3, e_4 \right\} \text{ משלימים לבסיס (3)}$$

(4) נסמן

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מחשבים את ההופכית ומקבלים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & -4.5 & -6.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$



$$C = \begin{pmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix} \text{ נסמן} \quad (1.1)$$

$$p_C(x) = (x-2)(x-1)$$

(2.1)

$$V_1 = N \begin{pmatrix} -1.5 & 2.5 \\ -1.5 & -2.5 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_2 = N \begin{pmatrix} 2.5 & 2.5 \\ -1.5 & -2.5 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3.1)

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ קיבלנו לכסינה ובפרט משולשית, מסמנים}$$

נחזור ל-4

$$Q' = I_k \oplus Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ (4) ניקח}$$

כעת

$$(Q^{-1}P^{-1})A(PQ)$$

הינה משולשית!

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המשולשת היא } PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המשולשת הינה}$$

## שילוש אוניטרי/אורתוגנלי

הגדרה

- יהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור על ממ"פ, נאמר ש  $T$  ניתן לשילוש אוניטרי אם קיים בסיס אורתונורמלי  $B$  עבור  $V$  כך ש  $[T]_B$  משולשית
- תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית, נאמר  $A$  ניתנת לשילוש אוניטרי אם קיימת  $P$  אוניטרית כך ש  $P^{-1}AP$  משולשית

### משפט השילוש האוניטרי

- יהי  $T$  אופרטור לינארי על ממ"פ אז ניתן לשילוש אוניטרי  $\iff p_T(x)$  מ"ל
- תהי  $A$  מטריצה ריבועית על ממ"פ אז ניתן לשילוש אוניטרי  $\iff p_A(x)$  מ"ל

### האלגוריתם

- (1) משלשים רגיל
- (2) מפעילים גראם שמידט על הבסיס או על עמודות  $P$  לקבלת בסיס אורתונורמלי או מטריצה אוניטרית

### דוגמה

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ נישאר עם הדוגמה ממקודם,}$$
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ נפעיל גראם שמידט על}$$
$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{210}}{3} \\ -\frac{\sqrt{210}}{105} \\ -\frac{11\sqrt{210}}{210} \\ \frac{\sqrt{210}}{35} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{1365}}{195} \\ -\frac{17\sqrt{1365}}{1365} \\ -\frac{2\sqrt{1365}}{455} \\ \frac{16\sqrt{1365}}{1365} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{39}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{39}}{39} \\ -\frac{\sqrt{39}}{13} \\ -\frac{5\sqrt{39}}{39} \end{pmatrix} \right\} \text{ ונקבל}$$

מציבים במטריצה חדשה את העמודות, היא אוניטרית וסיימנו.

## ז'רדון

### ז'רדון מטריצות ריבועיות

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

הגדרה בלוק ז'רדון הוא בלוק מהצורה

משפט ז'רדון תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית כך שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים, אזי  $A$  דומה למטריצה אלכסונית בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקי ז'רדון

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} = J_{m_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{m_k}(\lambda_k)$$

משפט ז'רדון הנילפוטנטי כאשר המטריצה נילפוטנטית (כלומר קיים  $k$  בעבורו  $A^k = 0$ ) מתקיים

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}$$

### הכללים לצורת ז'רדון

עבור  $\lambda$  ערך עצמי כלשהו

**הריבוי האלגברי** הוא סכום סדרי הבלוקים המתאימים ל  $\lambda$

**הריבוי הגיאומטרי** הוא מספר הבלוקים המתאימים לערך העצמי  $\lambda$

**החזקה של  $(x - \lambda)$  בפולינום המינימלי** היא גודל הבלוק המקסימלי המתאים ל  $\lambda$

### דוגמה

למשל, תהי  $A$  המקיימת:

ע"ע/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום המינימלי
0	4	3	2
1	3	2	2
2	1	1	1

מסתכלים על הערך העצמי 0, ישנם 3 בלוקים שסכום סדרם הוא 4 והמקסימלי מביניהם בגודל 2. אזי חייב להתקיים שהשניים האחרים מגודל 1

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus \dots$$

מסתכלים על הערך העצמי 1, ישנם 2 בלוקים שסכום סדרם הוא 3 והגודל מביניהם בגודל 2, לכן

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1)$$

והערך העצמי 2, הוא בלוק אחד ויחיד מגודל 1

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(2)$$