פתרון תרגיל 8 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ז

1. דנבחר פרמטריזציות כלשהן (במידת הצורך).

(א) פרמטריזציה של הספירה היא:

$$(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$$

באופן טריוויאלי לאחר חישוב קליל נקבל:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

וסמלי גאמא שלא מתאפסים הם:

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\phi\cos\phi, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\phi$$

נסמן: $\alpha_1(t) = \phi(t), \alpha_2(t) = \theta(t)$ והמשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} \phi'' - \sin\phi\cos\phi\,(\phi')^2 = 0 \\ \theta'' + 2\cot\phi\phi'\theta' = 0 \end{cases}$$

הפרמטריזציה היא במהירות יחידה, ונקבל עוד משוואה:

$$1 = \begin{pmatrix} \theta' & \phi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta' \\ \phi' \end{pmatrix}$$

ולכן נוכל לכתוב:

$$\begin{cases} \phi'' - \sin\phi\cos\phi\,(\phi')^2 = 0 \\ \theta'' + 2\cot\phi\phi'\theta' = 0 \\ r^2(\phi')^2 + r^2\sin^2\phi\,(\theta')^2 = 1 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -2\cot\phi\phi'$$

נבצע אינטגרציה dt על שני האגפים ונקבל:

$$\ln\theta' = \int\frac{\theta''}{\theta'}dt = \int -2\cot\phi\phi' dt = -2\int\cot\phi d\phi = -2\ln(\sin\phi) + \ln C$$

כאשר משנים משתנה מ־t ל־ϕ, מקבלים $d\phi = \phi'(t)dt$. מכיוון שהאינטגרל אינו מסוים, הוספנו קבוע $\ln C$ (הוספנו בצורת $\ln$ לשם הנוחות).
אם כן, בעזרת חוקי לוגריתמים:

$$\theta' = \frac{C}{\sin^2 \phi}$$

כעת, נציב את θ' במשוואה השלישית ונקבל:

$$r^2 \left(\phi'\right)^2 + r^2 \sin^2 \phi \left(\frac{C}{\sin^2 \phi}\right)^2 = 1$$

נבודד את ϕ' ונקבל:

$$\phi' = \frac{\sqrt{\sin^2 \phi - r^2 C^2}}{r \sin \phi}$$

נתבונן ב:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\phi'}{\theta'} = \frac{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - r^2 C^2}}{Cr}$$

ואם כן, $d\theta = \frac{Cr}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - r^2 C^2}} d\phi$. לכן, מצד אחד:

$$\int d\theta = \theta$$

ומצד שני:

$$\int d\theta = \int \frac{Cr}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - r^2 C^2}} d\phi = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2 C^2}{\sin^2 \phi}}} \cdot \frac{Cr}{\sin^2 \phi} d\phi =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 C^2 + r^2 C^2 \cot^2 \phi}} \cdot \frac{Cr}{\sin^2 \phi} d\phi = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2 C^2 \cot^2 \phi}{1 - r^2 C^2}}} \cdot \frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2 C^2} \cdot \sin^2 \phi} d\phi$$

כעת, $(\cot \phi)' = -\frac{1}{\sin^2 \phi}$. אם כן, נבצע החלפת משתנים:

$$p = \frac{Cr \cot \phi}{\sqrt{1 - r^2 C^2}} \Longrightarrow dp = -\frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2 C^2} \cdot \sin^2 \phi} d\phi$$

ונקבל:

$$\phi = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2 C^2 \cot^2 \phi}{1 - r^2 C^2}}} \cdot \frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2 C^2} \cdot \sin^2 \phi} d\phi = -\int \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} dp$$

ולכן: $\theta = -\arcsin p - B = -\arcsin\left(\frac{Cr \cot \phi}{\sqrt{1 - r^2 C^2}}\right) - B$. הוספנו קבוע B כי האינטגרל אינו מסוים.
לפיכך, קו גיאודזי נראה כך:

$$\alpha = \left(\phi, -\arcsin\left(\frac{Cr \cot \phi}{\sqrt{1 - r^2 C^2}}\right) - B\right)$$

איך נראית עקומה גיאודזית?
אנו יודעים שעקומה גיאודזית על הספירה היא קשת של מעגל גדול; כעת נראה זאת.
אנו יודעים ש: $\theta=-\arcsin\left(\frac{Cr\cot\phi}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right)-B$, ולכן:

$$\frac{Cr\cot\phi}{\sqrt{1-r^2C^2}}=-\sin\left(\theta+B\right)$$

נשתמש בזהות ל- $\sin$ של סכום זוויות ונקבל:

$$\frac{Cr\cos\phi}{\sqrt{1-r^2C^2}\cdot\sin\phi}=-\sin\theta\cos B-\cos\theta\sin B$$

נכפול ב- $\sin\phi$:

$$\frac{Cr\cos\phi}{\sqrt{1-r^2C^2}}=-\sin\theta\sin\phi\cos B-\cos\theta\sin\phi\sin B$$

נעבור מהקואורדינטות הספריות חזרה לקואורדינטות (x,y,z):

$$(x,y,z)=(r\sin\phi\cos\theta,r\sin\phi\sin\theta,r\cos\phi)$$

לכן: $-\sin\phi\cos\theta=-\frac{x}{r},-\sin\theta\sin\phi=-\frac{y}{r},r\cos\phi=z$.
נסמן: $A_3=\frac{C}{\sqrt{1-r^2C^2}},A_1=\frac{\sin B}{r},A_2=\frac{\cos B}{r}$ ונוכל לרשום:

$$A_3z=-A_1x-A_2y$$

וזוהי משוואת מישור שעובר בראשית הצירים.
העקומה הגיאודזית נמצאת גם על המישור (כי היא מקיימת את משוואתו) וגם על הספירה, ולכן היא חלק מחיתוך המישור והספירה.
אנו יודעים שחיתוך של מישור שעובר בראשית ושל ספירה הוא מעגל גדול, ולכן העקומה הגיאודזית היא אכן קשת מעגל גדול.

(ב) פרמטריזציה של הגליל היא למשל:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta,\phi\right)$$

המטריקה היא:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} r^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

וכל סמלי גאמא מתאפסים. לכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases}\theta''=0\\ \phi''=0\end{cases}$$

נאטגרץ פעמיים ונקבל:

$$\begin{cases}\theta=at+b\\ \phi=ct+d\end{cases}$$

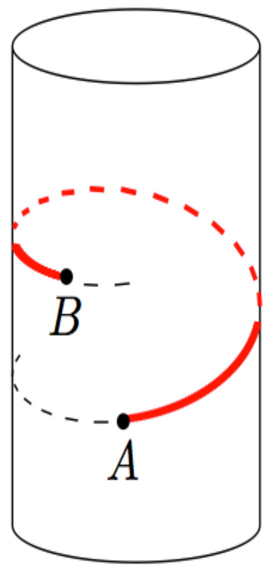
כלומר הקווים הגיאודזיים הם קווים ישרים:

$$\alpha(t) = (a, c)\, t + (b, d)$$

נציב בפרמטריזציה כדי לקבל את העקומות הגיאודזיות:

$$X \circ \alpha = \left(r \cos\left(at + b\right), r \sin\left(at + b\right), ct + d\right)$$

וזהו סליל לאורך הגליל.



אנו יודעים שהעקומות הגיאודזיות במישור הן קווים ישרים, וראינו שאורך עקומות נשמר כשאנו מגלגלים את המישור לגליל, ולכן הקווים הגיאודזיים זהים בשני המשטחים.

(ג) לאחר חישוב נקבל:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2\phi^2 & 0 \\ 0 & 1 + r^2 \end{pmatrix}$$

וסמלי גאמא שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{\phi}, \Gamma^2_{11} = -\frac{r^2}{1 + r^2}\phi$$

לכן המשוואות הגיאודזיות יהיו:

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta'' + \frac{2}{\phi}\theta'\phi' = 0 \\ \phi'' - \frac{r^2}{1+r^2}\phi\left(\theta'\right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

כמו כן, נדרוש שהפרמטריזציה של העקומה הגיאודזית תהיה במהירות יחידה ונקבל:

$$1 = (\alpha')^t \cdot (g_{ij}) \cdot (\alpha') = r^2\phi^2 (\theta')^2 + \left(1+r^2\right)(\phi')^2$$

מהמשוואה הגיאודזית הראשונה נקבל:

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -2\frac{\phi'}{\phi}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים לפי t ונקבל:

$$\ln\theta' = \int \frac{\theta''}{\theta'}dt = \int -2\frac{\phi'}{\phi}dt = -2\ln\phi + \ln C$$

הוספנו קבוע $\ln C$ כי האינטגרל לא מסוים. מחוקי הלוגריתמים נקבל:

$$\theta' = \frac{C}{\phi^2}$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל:

$$1 = r^2\phi^2\left(\frac{C}{\phi^2}\right)^2 + \left(1+r^2\right)(\phi')^2$$

נבודד את v' ונקבל:

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi' = \frac{\sqrt{\phi^2 - r^2C^2}}{\phi\sqrt{1+r^2}} \Longrightarrow dt = \frac{\phi\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{\phi^2-r^2C^2}}d\phi$$

לכן:

$$t = \int dt = \int \frac{\phi\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{\phi^2-r^2C^2}}d\phi = \sqrt{(1+r^2)(\phi^2-r^2C^2)} + B$$

הוספנו B כי האינטגרל לא מסוים. נחלץ את ϕ ונקבל:

$$\phi = \sqrt{\frac{(t-B)^2}{1+r^2} + r^2C^2}$$

נציב את ϕ שמצאנו חזרה במשוואה של θ':

$$\theta' = \frac{C}{\left(\frac{(t-B)^2}{1+r^2} + r^2C^2\right)} = \frac{1}{r^2C} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)}$$

נאטגרץ ונקבל:

$$\theta = \int \frac{1}{r^2C} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)}dt =$$

נחליף קלות את המשתנים:

$$p=\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\Longrightarrow dp=\frac{1}{Cr\sqrt{1+r^2}}$$

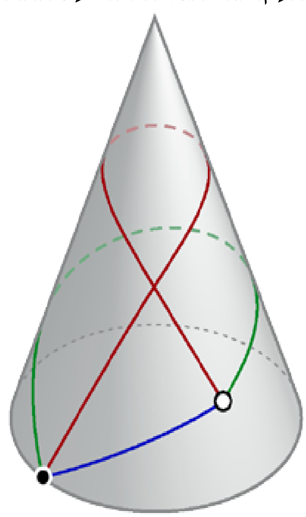
ונקבל:

$$\theta=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\cdot\int\frac{1}{1+p^2}dp=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan p+A=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)+A$$

ובסך הכל, הנוסחה לקו גיאודזי של החרוט היא:

$$\alpha(t)=\left(\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)+A,\sqrt{\frac{(t-B)^2}{1+r^2}+r^2C^2}\right)$$

העקומות הגיאודזיות על החרוט נראות כך:



(ד) נניח שהפרמטריזציה של המשטח היא $X(u,v)$.
לאחר חישוב אפשר להיווכח שסמלי גאמא שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2v}.\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2v},\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2v}$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} u''+\frac{1}{v}u'v'=0 \\ v''-\frac{1}{2v}\left(u'\right)^2+\frac{1}{2v}\left(v'\right)^2=0 \end{cases}$$

בנוסף, יש לנו את המשוואה שנובעת מכך שהפרמטריזציה במהירות יחידה:

$$1=\left(\gamma'\right)^t\cdot G\cdot\left(\gamma'\right)=v\left(u'\right)^2+v\left(v'\right)^2$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{v'}{v}$$

נבצע אינטגרציה לפי t ונקבל:

$$\ln u=\int\frac{u''}{u'}dt=\int-\frac{v'}{v}dt=-\ln v+\ln C$$

כאשר $\ln C$ קבוע בנוהל. נקבל, אם כך:

$$u'=\frac{C}{v}$$

נציב זאת במשוואה השלישית:

$$1=v\left(\frac{C}{v}\right)^2+v\left(v'\right)^2$$

ולכן:

$$v'=\frac{\sqrt{v-C^2}}{v}$$

כעת, נתבונן ב:

$$\frac{du}{dv}=\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dv}{dt}}=\frac{u'}{v'}=\frac{\frac{C}{v}}{\frac{\sqrt{v-C^2}}{v}}=\frac{C}{\sqrt{v-C^2}}$$

לכן: $du=\frac{C}{\sqrt{v-C^2}}dv$. אם כן:

$$u=\int du=\int\frac{C}{\sqrt{v-C^2}}dv=2C\sqrt{v-C^2}+B$$

ולכן הקווים הגיאודזיים הם מהצורה:

$$\alpha\left(t\right)=\left(2C\sqrt{t-C^2}+B,t\right)$$

2. נמצא את המשוואות הגיאודזיות בעזרת סמלי גאמא ונראה בכל סעיף האם הישרים עונים על הדרוש. אין פרמטריזציה ולכן נשתמש בנוסחה הארוכה של סמלי גאמא.

(א) מהגדרת המטריקה נקבל:

$$\left(g^{ij}\right)=\frac{1}{e^{x+y}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial y}=-\left(g_{ij}\right)$$

לפי הנוסחה נקבל:

$$\begin{gathered}\Gamma_{11}^{1}=\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{22}^{1}=-\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{11}^{2}=-\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\tfrac{1}{2}\\ \Gamma_{22}^{2}=-\tfrac{1}{2}\end{gathered}$$

(ב) המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 + x'y' = 0 \\ y'' - \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 + x'y' = 0 \end{cases}$$

נציב $y = x$ ונקבל:

$$x'' + \frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(x')^2 + x'x' = 0$$

כלומר $x'' + (x')^2 = 0$. נציב $z = x'$ ונקבל:

$$z' + z^2 = 0$$

קל לראות שהפתרון הוא מהצורה:

$$z = \frac{1}{t - C}$$

כאשר C קבוע. למתקדמים: ברנולי. אם כך:

$$x' = \frac{1}{t - C} \Longrightarrow x = \ln|t - C| + B$$

כאשר B קבוע. לכן הקו הגיאודזי הוא:

$$\alpha(t) = (\ln|t - C| + B, \ln|t - C| + B)$$

(ג) נציב $y = 0$ במשוואות הגיאודזיות ונקבל:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ \frac{1}{2}(x')^2 = 0 \end{cases}$$

לכן $x' = 0$ ולכן $x = A$ כאשר A קבוע. קיבלנו נקודה:

$$\alpha = (A, 0)$$

ולא עקומה ולכן זו לא עקומה גיאודזית.

(ד) נציב $x = 1$ וכמו בסעיף הקודם נקבל שזו אינה עקומה גיאודזית.