תרגיל 2 אינפי 3 תשע"ח

1. תהי: $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}<1\right\}$. האם A קמורה?

2. תהי $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}^m$ סדרה. הוכיחו ש: $a_n\longrightarrow a$ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה U המקיימת $a\in U$ (סביבה פתוחה של a) קיים n_0 כך שלכל $n_0<n$, מתקיים: $a_n\in U$.

3. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$. סדרה $\{a_n\}\subseteq A$ נקראת סדרת קושי אם לכל $0<\varepsilon$ קיים n_0 כך שלכל $n_0<n,m$ מתקיים: $\|a_n-a_m\|<\varepsilon$.

   (א) הוכיחו שסדרה מתכנסת (כלומר, קיים $a\in A$ עבורו $a_n\longrightarrow a$) היא סדרת קושי. האם כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת?

   (ב) הוכיחו שסדרת קושי היא סדרה חסומה.

   (ג) הוכיחו שאם לסדרת קושי יש גבול חלקי, אז היא הסדרה מתכנסת לגבול זה (כלומר, גבול חלקי הוא גבול של הסדרה כולה).

   (ד) תהי K קבוצה קומפקטית. הוכיחו או הפריכו: כל סדרת קושי ב-K היא סדרה מתכנסת.

   (ה) הוכיחו שהסדרה $a_n=\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}\right)$ בקבוצה $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ היא סדרת קושי (שימו לב שבקבוצה זו היא לא מתכנסת).

4. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה חסומה ב-$\mathbb{R}^n$. נניח שהסדרה $\{\|x_n-0\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ עולה ממש. האם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת?

5. חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שאינם קיימים:

   (א) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

   (ב) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}x\ln\left(x^2+3y^2\right)$.

   (ג) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

   (ד) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(2,1)}\frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)}$.