

מבחן לדוגמא – מבוא לאנליזה 2 למורים – 88-612-01

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

**שאלה ראשונה:** חישוב אינטגרלים – לא מסוים או מסויים (כולל מציאת שטח או אורך עקומה).

1. חשבו את:

א.  $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$

ב.  $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} dx$

**שאלות שתיים עד ארבע:** מציאת אסימפטוטות, קביעה אם אינטגרל אמיתי מתכנס או לא, שימוש בנוסחת ניוטון לייבניץ (למשל חישוב גבולות או חקירה), חישוב גבול באמצעות סכום רימן, מציאת טור חזקות/טיילור/מקלורן, מציאת רדיוס התכנסות, קירוב מספר עד כדי שגיאה נתונה, חישוב נגזרות גבוהות.

2.

א. מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$

3.

א. חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{(t^2)} dt}{1 - \cos(x)}$

ב. חשבו את גבול הסדרה  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

4.

א. קרבו את  $\int_0^{0.5} \frac{1}{x^4 + 1} dx$  עד כדי שגיאה של  $h = \frac{1}{10,000}$ .

ב. חשבו את  $f^{(48)}(0)$  עבור  $f(x) = x^2 e^{2x}$ .

**שאלה חמישית:** שאלה תאורטית על נושא כלשהו מהקורס.

5. תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה ואי שלילית, כלומר לכל  $x$  מתקיים  $0 \leq f(x)$ .

נגדיר את הפונקציה  $g(x) = x \int_0^x f(t) dt$ .

א. הוכיחו כי הפונקציה  $g(x)$  מונוטונית עולה בתחום  $[0, \infty)$ .

ב. נניח בנוסף כי  $f(x)$  מונוטונית עולה, הוכיחו כי  $g(x)$  מחייכת (קמורה) בתחום  $[0, \infty)$ .