אינפי 1 – פתרון תרגיל 2

1.

i. $\frac{2+\frac{1}{H^3}+\frac{3}{H^4}}{4-\frac{5}{H^4}} = \frac{\frac{H}{H^4}+\frac{2H^4}{H^4}+\frac{3}{H^4}}{\frac{4H^4}{H^4}-\frac{5}{H^4}} = \frac{H+2H^4+3}{4H^4-5}$.

המספר במונה הוא משמעותי (כסכום של מס' משמעותי עם אינפיניטסימל) והמספר במכנה גם הוא משמעותי מאותה סיבה. ע"כ המספר כולו הוא משמעותי כמנה של מספרים משמעותיים.

ii. $\frac{\frac{1}{H^3}-\frac{1}{H^2}+\frac{1}{H}}{\frac{1}{H^2}-\frac{1}{H}+1} = \frac{\frac{H}{H^4}-\frac{H^2}{H^4}+\frac{H^3}{H^4}}{\frac{H^2}{H^4}-\frac{H^3}{H^4}+\frac{H^4}{H^4}} = \frac{H-H^2+H^3}{H^2-H^3+H^4}$.

במונה יש מס' אינפיניטסימלי (כסכום של מס' אינפיניטסימליים) ומכנה יש מס' משמעותי (סכום של מס' משמעותי עם אינפיניטסימלי) לכן סה"כ מתקבל מס' אינפיניטסימלי.

iii. $\frac{\frac{1}{H^2}+\frac{2}{H}-900}{\frac{64}{H^2}-\frac{3000}{H}} = \frac{\frac{1}{H^2}+\frac{2H}{H^2}-\frac{900H^2}{H^2}}{\frac{64}{H^2}-\frac{3000H}{H^2}} = \frac{1+2H-900H^2}{64-3000H}$

המונה משמעותי, המכנה אינפיניטסימל (שאיננו 0), ע"כ המס' אינסופי.

iv. $\frac{18+\frac{128}{H}+\frac{2\epsilon}{H}}{-2-\frac{256}{H}-\frac{512\epsilon}{H}} = \frac{\frac{18H}{H}+\frac{128}{H}+\frac{2\epsilon}{H}}{\frac{-2H}{H}-\frac{256}{H}-\frac{512\epsilon}{H}} = \frac{18H+128+2\epsilon}{-2H-256-512\epsilon}$

המונה והמכנה משמעותיים, ע"כ המס' משמעותי.

v. $H^2-7H+50 = H(H-7)+50$.

כלומר זהו מס' אינסופי כמכפלה של שני מס' אינסופיים ועוד מספר סופי.

vi. $\frac{2017}{\sqrt{H+2018}+\sqrt{H+1}} = \left(\sqrt{H+2018}-\sqrt{H+1}\right)\frac{(\sqrt{H+2018}+\sqrt{H+1})}{\sqrt{H+2018}+\sqrt{H+1}} = \sqrt{H+2018}-\sqrt{H+1}$

המונה משמעותי והמכנה אינסופי (סכום של מספרים אינסופיים חיוביים), ע"כ המספר אינפיניטסימלי.

vii. $\frac{1}{\sqrt{4+\epsilon}+2} = \frac{\epsilon}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)} = \frac{(\sqrt{4+\epsilon}-2)(\sqrt{4+\epsilon}+2)}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)} = \frac{\sqrt{4+\epsilon}-2}{\epsilon}$.

לכן משמעותי (חילוק של משמעותי במשמעותי).

viii. $H\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-\sqrt{2}\right)$.

זהו מספר אינסופי כמכפלה של מספר אינסופי עם מספר משמעותי.

ix. $\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2} = H\frac{\frac{1}{H}}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2} = H\frac{(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-2)(\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2)}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2} = H\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-2\right)$

כלומר זה מס' משמעותי כי זו חלוקה של מס' משמעותי במס' משמעותי.

2. יהי H מספר אינסופי חיובי, K מספר אינסופי חיובי הגדול ממנו. הוכיחו או הפריכו: $K-H$ מספר אינסופי.

<u>הפרכה:</u> למשל יהי H מס' אינסופי חיובי כלשהו, $K=H+1$, אזי $K-H=H+1-H=1$ כלומר זוהי דוגמא לכך שיוצא מספר סופי.

3. יהי H מספר אינסופי חיובי, K מספר אינסופי שלילי. הוכיחו או הפריכו: $H-K$ מספר אינסופי.

הוכחה: K אינסופי שלילי לכן $K-$ אינסופי חיובי (ראינו בתרגול) לכן קל לראות ש- $(-K)+H$ אינסופי (חיובי).

4. יהי H מספר אינסופי חיובי, b ממשי חיובי. הוכיחו או הפריכו: bH אינסופי חיובי.

הוכחה: לפי הגדרת מס' אינסופי חיובי, כדי להראות ש-bH אינסופי חיובי יש להראות כי bH גדול מכל מספר ממשי. יהי r מס' ממשי. H אינסופי חיובי לכן $H > \frac{r}{b}$, כלומר $bH > r$ כדרוש.

5. יהי ϵ אינפיניטסימל. הוכיחו או הפריכו: ϵ^2 אינפיניטסימל חיובי.

הפרכה: 0 הוא אינפיניטסימל ו-$0^2 = 0$ איננו חיובי.

6. יהי ϵ אינפיניטסימל שלילי. הוכיחו או הפריכו: ϵ^2 אינפיניטסימל חיובי.

הוכחה: ראשית, ϵ^2 הוא אינפיניטסימל כי ראינו כי כפל של אינפיניטסימליים הוא אינפיניטסימל. הוא חיובי כי בממשיים מתקיימת הנוסחה $a < 0 \rightarrow a^2 > 0$ ולפי עקרון ההעברה נקבל $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon^2 > 0$.

7. יהי H אינסופי חיובי, a סופי חיובי. הוכיחו או הפריכו: $H - a$ מספר חיובי.

הוכחה: H אינסופי חיובי לכן $H > r$ לכל מספר ממשי. ראינו בתרגול שיותר מכך מתקיים: $H > x$ לכל מספר סופי. בפרט עבור המספר הסופי a מתקיים $H > a$ כלומר $H - a > 0$ כלומר $H - a$ חיובי, כדרוש.

8. יהי ϵ אינפיניטסימל. הוכיחו או הפריכו: $2^{30}\epsilon < 1$

הוכחה: ϵ אינפיניטסימל לכן הוא קטן מכל מס' ממשי חיובי. בפרט $\epsilon < \frac{1}{2^{30}}$ כלומר $2^{30}\epsilon < 1$ כדרוש.

9. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל מספר היפר-ממשי קיים מספר היפר-ממשי הגדול ממנו

הוכחה: יש לנו את הטענה הממשית "לכל מס' ממשי קיים מס' ממשי הגדול ממנו" (למשל, x+1>x לכל x ממשי). ע"כ על פי עקרון ההעברה מקבלים כי לכל מס' היפרממשי קיים מס' היפרממשי הגדול ממנו.

ב. לכל מספר היפר-ממשי קיים מספר ממשי הגדול ממנו

הפרכה: יהי H מס' היפרממשי אינסופי חיובי. אין אף מס' ממשי הגדול ממנו. הרי לו היה r ממשי המקיים r>H זו היתה סתירה כי לפי הגדרת אינסופי חיובי מתקיים H>r.

ג. לכל מספר ממשי קיים מספר היפר-ממשי הגדול ממנו

הוכחה: ראינו בסעיף א' כי לכל מס' היפרממשי קיים מס' היפרממשי הגדול ממנו; בפרט, עבור מס' ממשי, קיים מס' היפרממשי הגדול ממנו. (כי כל ממשי הוא היפרממשי).
לחלופין, ניתן לחזור על הנימוק בסעיף א': יהי x מס' ממשי אז x+1>x , ו- x+1 הוא ממשי ובפרט היפרממשי.

ד. לכל מספר ממשי קיים מספר אינפיניטסימלי הגדול ממנו

הפרכה: למספר הממשי 7 לא קיים מס' אינפיניטסימלי הגדול ממנו. הרי לו e היה אינפי' הגדול מ-7 היינו מקבלים סתירה כי לפי הגדרת מס' אינפיניטסימלי, e<7.

ה. לכל מספר ממשי קיים מספר אינפיניטסימלי הקטן ממנו

הפרכה: למספר הממשי -7 לא קיים מס' איניפיניטסימלי הקטן ממנו, הרי לו e היה אינפי' הקטן מ--7 היינו מקבלים סתירה כי לפי הגדרת מס' אינפיניטסימלי, $e>-7$.

ו. לכל מספר אינפיניטסימלי קיים מספר ממשי הגדול ממנו

הוכחה: יהי e מס' אינפיניטסימלי. לפי הגדרת מס' אינפיניטסימלי מתקיים $e<1$ כלומר 1 מס' ממשי הגדול מ-e.

ז. לכל מספר אינפיניטסימלי קיים מספר ממשי הקטן ממנו

הוכחה: יהי e מס' אינפיניטסימלי. לפי הגדרת מס' אינפיניטסימלי מתקיים $e>-1$ כלומר -1 מס' ממשי הקטן מ-e.