דיפרנציאביליות

תזכורת

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$ פונקציה רציפה.

אזי, לכל קבוצה פתוחה $H \subseteq \mathbb{R}^m$, הקבוצה:

$$f^{-1}(H) \quad := \quad \{x \in E \mid f(x) \in H\}$$

פתוחה ביחס ל - E.

בהוכחת המשפט בהרצאה 5 נפלה טעות. נביא כאן הוכחה נכונה.

הוכחה

נוכיח כי קיימת קבוצה פתוחה $G \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש:

$$f^{-1}(H) \quad = \quad E \cap G$$

יהי $x \in f^{-1}(H)$.

עפ"י הגדרת התמונה ההפוכה:

$$x \quad \in \quad E$$

וכן:

$$f(x) \quad \in \quad H$$

H פתוחה, לכן קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(f(x), r) \quad \subseteq \quad H$$

f רציפה, לכן קיים $0 < \delta$ כך ש:

$$\begin{aligned} f(B(x,\delta) \cap E) \quad &\subseteq \quad B(f(x), r) \\ &\subseteq \quad H \end{aligned}$$

נסמן:

$$B_x \quad := \quad B(x, \delta)$$

לכן:

$$f(B_x \cap E) \quad \subseteq \quad H$$

עפ"י הגדרת התמונה ההפוכה:

$$B_x \cap E \quad \subseteq \quad f^{-1}(H)$$

נגדיר:

$$G \quad := \quad \bigcup_{x \in f^{-1}(H)} B_x$$

עפ"י הגדרת G, G פתוחה ומתקיים:

$$G \cap E \quad = \quad f^{-1}(H)$$

לכן, $f^{-1}(H)$ פתוחה ב - E.

■

הגדרה

תהי $Q \subseteq \mathbb{R}^m$.

תהי $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

המרחק מ - x_0 עד Q מוגדר על ידי:

$$d(x_0, Q) \quad := \quad \inf_{y \in Q} \|y - x_0\|$$

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

יהי Q הגרף של f.

תהי $x_0 \in E$.

היפר מישור H ב - $\mathbb{R}^{n+1}$ נקרא **משיק** ל Q – בנקודה $w_0 := \left(x_0, f(x_0)\right)$ אם H עובר דרך w_0, ומתקיים:

$$\lim_{w \to w_0, w \in H} \frac{d(w, Q)}{\|w - w_0\|} = 0$$

למה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

יהי Q הגרף של f.

תהי $x_0 \in E$.

אם f דיפרנציאבילית ב - x_0, אז קיים היפר מישור משיק לגרף Q בנקודה $w_0 := (x_0, f(x_0))$, והמשוואה שלו היא:

$$z = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

הוכחה

מתקיים:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(0)$$

$f'(x_0)$ לינארית, לכן:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$$

לכן, H עובר דרך הנקודה w_0.

תהי $w \in H$.

לכן, קיימת נקודה $x \in E$ כך ש:

$$w = \left(x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)$$

נגדיר נקודה $y \in Q$ ע"י:

$$y := \left(x, f(x)\right)$$

מתקיים:

$$\|w - y\| = \left\|\left(x - x, f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\right)\right\|$$

לכן:

$$\|w - y\| \quad = \quad |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|$$

מתקיים:

$$\|w - w_0\| \quad = \quad \left\|\left(x - x_0, f(x_0) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)\right)\right\|$$

לכן:

$$\|w - w_0\| \quad \geq \quad \|x - x_0\|$$

לכן:

$$0 \quad \leq \quad \frac{d(w, Q)}{\|w - w_0\|} \quad \leq \quad \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)|}{\|x - x_0\|}$$

f דיפרנציאבילית, לכן:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)|}{\|x - x_0\|} \quad = \quad 0$$

עפ"י משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{w \to w_0, w \in H} \frac{d(w, Q)}{\|w - w_0\|} \quad = \quad 0$$

לכן, H היפר מישור משיק ל $Q -$ בנקודה x_0.

■

למה

אם f דיפרנציאבילית ב x_0-, אז היא רציפה ב - x_0.

הוכחה

f דיפרנציאבילית, לכן:

$$f(x) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0)$$

כאשר:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \quad = \quad 0$$

לכן:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r(x-x_0)\\ &= f(x_0)+f'(x_0)(0)+\lim_{x\to x_0} r(x-x_0)\\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

לכן, f רציפה ב - x_0.

■

דוגמה

רציפות אינה גוררת דיפרנציאביליות.

נגדיר:

$$f(x,y) := \begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נוכיח כי f רציפה ב - $(0,0)$.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

מתקיים:

$$|xy| \leq x^2+y^2$$

לכן:

$$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

עפ"י משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

לכן:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

לכן, f רציפה ב - $(0,0)$.

נוכיח כי f אינה דיפרנציאבילית ב - $(0,0)$.

נניח בשלילה כי f דיפרנציאבילית ב - $(0,0)$.

לכן:

$$\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \alpha h_1 + \beta h_2 + r(h_1,h_2)$$

כאשר:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

נבחר:

$$h_1 \neq 0$$

$$h_2 = 0$$

נקבל:

$$-\alpha h_1 = r(h_1,0)$$

כאשר:

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{r(h_1,0)}{|h_1|} = 0$$

לכן:

$$\alpha = 0$$

באופן דומה:

$$\beta = 0$$

לכן:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

נבחר:

$$h_1 = h_2$$

נקבל:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{2}$$

סתירה.

לכן, f אינה דיפרנציאבילית ב - $(0,0)$.

■

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f : E \to \mathbb{R}$,

תהי $x_0 \in E$.

יהי $1 \le i \le n$.

אם קיים הגבול:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

אז הוא נקרא **הנגזרת החלקית** של f לפי x_i בנקודה x_0, ומסומן:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

או:

$$f'_{x_i}(x_0)$$

דוגמה

נגדיר:

$$f(x,y,z) := xe^{yz}$$

מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{yz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{yz}$$

■

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$,

תהי $x_0 \in E$.

אם f דיפרנציאבילית ב - x_0, אז הנגזרות החלקיות שלה קיימות ומתקיים:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i + r(h)$$

כאשר:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

הוכחה

f דיפרנציאבילית, לכן:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A(h) + r(h)$$

כאשר A לינארית ומתקיים:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

יהי $1 \leq i \leq n$.

ניקח:

$$h = te_i$$

נקבל:

$$f(x_0 + te_i) = f(x_0) + A(te_i) + r(te_i)$$

A לינארית, לכן:

$$\begin{aligned} A(te_i) &= tA(e_i) \\ &= a_i t \end{aligned}$$

לכן:

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = a_i + \frac{r(te_i)}{t}$$

לכן:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} &= a_i + \lim_{t\to 0}\frac{r(te_i)}{t} \\ &= a_i \end{aligned}$$

לכן:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = a_i$$

וכן:

$$A(h) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\cdot h_i$$

לכן, הנגזרות החלקיות של f ב - x_0 קיימות, ומתקיים:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\cdot h_i + r(h)$$

כאשר:

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

■

דוגמה

קיום הנגזרות החלקיות אינו גורר דיפרנציאביליות.

נגדיר:

$$f(x,y) \quad := \quad \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t+0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

באופן דומה:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \quad = \quad 0$$

אולם, f אינה דיפרנציאבילית ב - $(0,0)$, ואפילו אינה רציפה ב - $(0,0)$.

■

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

אם הנגזרות החלקיות של f קיימות ורציפות בסביבת הנקודה x_0, אז f דיפרנציאבילית ב - x_0.

הוכחה

נסמן:

$$x_j \quad := \quad x_0 + \sum_{i=1}^{j} h_i e_i$$

כאשר:

$$h = (h_1, \cdots, h_n)$$

מתקיים:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_j) - f(x_{j-1}) \right)$$

נגדיר:

$$g(t) \coloneqq f(x_{j-1} + te_j)$$

מתקיים:

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = g(h_j) - g(0)$$

מתקיים:

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{f(x_{j-1} + te_j + he_j) - f(x_{j-1} + e_j)}{h}$$

לכן:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{j-1} + te_j)$$

עפ"י משפט לגנרז', קיים $\xi_j \in (0, h_j)$ (או $(h_j, 0)$), כך ש:

$$g(h_j) - g(0) = g'(\xi_j) h_j$$

לכן:

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = g'(\xi_j) h_j$$

לכן:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{j-1} + \xi_j e_j) \right) \cdot h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \cdot h_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{j-1} + \xi_j e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right) \cdot h_j \end{aligned}$$

לכן:

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\cdot h_j+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right)\cdot h_j$$

נגדיר:

$$A(h) \coloneqq \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\cdot h_j$$

$$r(h) \coloneqq \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right)\cdot h_j$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}|r(h)| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right)\cdot h_j\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right)\cdot h_j\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right|\cdot\left|h_j\right| \\ &\le \|h\|\cdot\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right|\end{aligned}$$

לכן:

$$0 \le \frac{|r(h)|}{\|h\|} \le \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right|$$

מתקיים:

$$\lim_{h\to 0} x_{j-1}+\xi_j e_j = x_0$$

לכן:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_{j-1}+\xi_j e_j\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

לכן:

$$\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{j-1}+\xi_j e_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right| \quad = \quad 0$$

עפ"י משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

לכן, f דיפרנציאבילית ב - x_0.

■

דוגמה

דיפרנציאביליות אינה גוררת רציפות של הנגזרות החלקיות.

נגדיר:

$$f(x) \quad \coloneqq \quad \begin{cases}\|x\|^2\sin\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

מתקיים:

$$f(h+0)-f(0) \quad = \quad \|h\|^2\sin\left(\frac{1}{\|h\|^2}\right)$$

נגדיר:

$$r(h) \quad \coloneqq \quad \|h\|^2\sin\left(\frac{1}{\|h\|^2}\right)$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} \quad &= \quad \lim_{h\to 0}\|h\|\sin\left(\frac{1}{\|h\|^2}\right)\\ &= \quad 0\end{aligned}$$

לכן, f דיפרנציאבילית ב - 0.

אולם:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad = \quad 2x_j\sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right)-\frac{2x_j}{\|x\|}\cos\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right)$$

הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x_j}{\|x\|}\cos\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right)$$

אינו קיים.

לכן, הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

אינו קיים.

לכן:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

אינה רציפה ב - $(0,0)$.

■