אלגברה לינארית למהנדסים - פתרון תרגיל 5

הערה: כל פתרון מהפתרונות הבאים מהווה סקיצה של פתרון. כמובן שכדי לכתוב פתרון מלא עליכם לפרט יותר ולנמק את השלבים.

1. היה צריך להוכיח או להפריך, הפרכה ע"י דוגמה נגדית והוכחה ע"י מעבר על כל האכסיומות:

(א) זה אינו מ"ו. למשל, בגלל שאסוציאטיביות של כפל בסקלר אינו מתקיים:

$$i \boxdot ((1+i) \boxdot 8) = i \boxdot (1 \cdot 8) = 0 \cdot 8 = 0$$

ולעומת זאת:

$$(i \cdot (1+i)) \boxdot 8 = (i-1) \boxdot 8 = (-1) \cdot 8 = -8$$

(ב) זה אכן מ"ו. נראה כמה אכסיומות נבחרות:

i. אסוציאטיביות, נובעת מהאסוציאטיבות ב־$\mathbb{R}$:

$$v_1 \boxplus (v_2 \boxplus v_3) = v_1(v_2 \cdot v_3) = (v_1 v_2) v_3 = (v_1 \boxplus v_2) \boxplus v_3$$

ii. קיום איבר נגדי: מכיוון שהוקטורים הם ממשיים חיוביים אפשר לקחת $-v = v^{-1}$ ואז נשים לב שאיבר האפס הוא $1 \in \mathbb{R}$

iii. דיסט' של מעל חיבור סקלרי:

$$(\alpha + \beta) \boxdot v = v^{\alpha+\beta} = v^{\alpha} \cdot v^{\beta} = (\alpha \boxdot v) \boxplus (\beta \boxdot v)$$

iv. אסוצ':

$$\alpha \boxdot (\beta \boxdot v) = (v^{\beta})^{\alpha} = v^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \boxdot v$$

2. נשים לב שמכיוון שראינו בכיתה שהפונקציות מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ הן מ"ו מעל $\mathbb{R}$, אז בעצם כל האכסיומות (חוץ מקשירות וקיום איבר האפס) מתקיימות והוכחתן זה פשוט העתקה ממה שעשינו בתרגול. ולכן רק עלינו לבדוק את הקשירות וקיום איבר אפס (ז"א תת־מרחב וקטורי):

(א) זה אכן מ"ו:

i. סגירות לחיבור: אם $f,g \in V$ אזי:

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0$$

ii. סגירות לכפל בסקלר, $c \in \mathbb{R}$ $f \in V$ אזי:

$$(c \cdot f)(3) = c \cdot f(3) = c \cdot 0 = 0$$

iii. קיום איבר האפס, ברור כי פונקצית האפס תמיד מחזירה אפס.

(ב) זה אינו מ"ו, אין סגירות לחיבור: אם $f,g \in V$ ז"א מקבלות את הערך 3 ב־3, אזי

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 3 + 3 = 6 \neq 3$$

3. נשים לב שמספיק להראות את סעיף ב (סעיף א נובע ממנו). בדיקת האכסיומות היא די מיידית שכן נובעת מאכסיומות השדה וששמים לב ש־$\mathbb{K}$ הוא תת־שדה (ובפרט תת־קבוצה) של $\mathbb{F}$. למשל, נראה דיסט' מעל חיבור וקטורי: אזי אם $\alpha \in \mathbb{K}$ $v_1, v_2 \in \mathbb{F}$:

$$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$$

כשהמעבר נובע מכך שזוכרים שכל האיברים הם בעצם איברים של השדה $\mathbb{F}$, ואנו יודעים שדיסט' מתקיימת בכל שדה.

4. זה אכן מ"ו: הסגירות לחיבור וכפל בסקלר נובעים ישירות מההגדרה (שכן אנו יודעים שב־$\mathbb{R}$ יש סגירות לכפל וחיבור), לגבי שאר האכסיומות:

(א) חיבור:

i. קומו', נובע מקומו ב־$\mathbb{R}$:

$$(x_1,y_1) \boxplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2+1, y_1+y_2+1) = (x_2+x_1+1, y_2+y_1+1) = (x_2,y_2) \boxplus (x_1,y_1)$$

ii. אסוצ', באופן דומה נובע מאסוצ' ב־$\mathbb{R}$.

iii. קיום איבר אפס. נשים לב ש:

$$(x_1,y_1) \boxplus (-1,-1) = (x_1 - 1 + 1, y_1 - 1 + 1) = (x_1, y_1)$$

iv. קיום איבר נגדי. בדיקה מראה שהאיבר הנגדי ל־(x,y) הוא $(-x-2, -y-2)$.

(ב) כפל בסקלר:

i. דיסט' מעל חיבור וקטורי:

$$c\boxdot((x_1,y_1)\boxplus(x_2,y_2)) = c\boxdot(x_1+x_2+1, y_1+y_2+1) = (cx_1+cx_2+c+c-1, cy_1+cy_2+c+c-1)$$

$$= (cx_1+c-1+cx_2+c-1+1, cy_1+c-1+cy_2+c-1+1) = (cx_1+c-1, cy_1+c-1)\boxplus(cx_2+c-1, cy_2+c-1)$$

$$= (c \boxdot (x_1,y_1) \boxplus (c \boxdot (x_2,y_2))$$

ii. דיסט' מעל חיבור סקלרי:

$$(c+d)\boxdot(x,y) = ((c+d)x+c+d-1, (c+d)y+c+d-1) = (cx+c-1+dx+d-1+1, cy+c-1+dy+d-1+1)$$

$$= (cx+c-1, cy+c-1)\boxplus(dx+d-1, dy+d-1) = (c\boxdot(x,y))\boxplus(d\boxdot(x,y))$$

iii. אסוצ':

$$c\boxdot(d\boxdot(x,y)) = c\boxdot(dx+d-1, dy+d-1) = (cdx+cd-c+c-1, cdy+cd-c+c-1)$$

$$= (cdx+cd-1, cdy+cd-1) = (cd)\boxdot(x,y)$$

iv. נייטרליות של איבר יחידה של השדה:

$$1 \boxdot (x,y) = (1\cdot x+1-1, 1\cdot y+1-1) = (x,y)$$

שאלה 5

עבור כל אחת מתת־הקבוצות הבאות של $\mathbb{R}^3$, נוכיח או נפריך כי תת־קבוצה זו מהווה תת־מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$:

א) $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1+2x_2+3x_3=0\right\}$
זהו אכן תת־מרחב וקטורי. אפשר להוכיח זאת ישירות בקלות (קבוצה לא ריקה כי 0 מוכל בה, סגירות לחיבור ולכפל בסקלר קל להוכיח), אולם זה נובע גם מכך שזהו הגרעין של הט"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת $T\left(x,y,z\right)=x+2y+3z$.

ב) $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1+2x_2+3x_3=4\right\}$
זהו אינו תת מרחב וקטורי מאחר שאינו סגור לחיבור למשל (למשל $(4,0,0)$ו $(0,2,0)$ מוכלים בו, אבל $(4,2,0)$ לא).

ג) $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1x_2x_3=0\right\}$
זהו אינו תת־מרחב וקטורי מאחר שאינו סגור לחיבור למשל (למשל $(1,1,0)$ ו $(0,0,1)$ מוכלים בו, אבל $(1,1,1)$לא).

ד) $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1x_2\in\mathbb{Q}\right\}$
זהו אינו תת מרחב וקטורי כי אינו סגור לכפל בסקלר (למשל $(1,1,1)$ מוכל בו אבל $\pi\left(1,1,1\right)=\left(\pi,\pi,\pi\right)$ לא מוכל בו כי π^2 אינו רציונלי).

ה) $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1+x_2+x_3=0\,and\,x_1-2x_2+\pi x_3=0\right\}$
זהו אכן תת־מרחב וקטורי. כמו בא' אפשר להוכיח זאת ישירות, ואפשר פשוט להשתמש בעובדה שזהו הגרעין של ההעתקה

$$\begin{aligned}T:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2\\ T\left(x,y,z\right) &= \left(x+y+z,\,x-2y+\pi z\right)\end{aligned}$$

שאלה 6

יהי F שדה, יהי V מ"ו מעל F ויהיו $U_1,U_2\subseteq V$ תתי־מרחבים.

א) נראה כי האיחוד $U_1\cup U_2$ אינו תמיד תת־מרחב וקטורי של V. ניקח לדוגמא את $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, ואת הצירים בתור U_1 ו U_2. אנו יודעים כי אלו תתי מרחבים וקטוריים, אולם נשים לב כי $\left(1,0\right),\left(0,1\right)\in U_1\cup U_2$ אבל $\left(1,1\right)\notin U_1\cup U_2$, ולכן $U_1\cup U_2$ אינו סגור לחיבור ולכן אינו תת־מרחב וקטורי.

ב) נוכיח כי U_1+U_2 הוא תת־מרחב וקטורי של V. נסמן $U=U_1+U_2$. ראשית נשים לב כי $0=0+0\in U$ ולכן U אינה ריקה. נניח כעת כי $u,v\in U$. אזי קיימים $u_1,v_1\in U_1$ ו $u_2,v_2\in U_2$ כך ש $u=u_1+u_2$ ו $v=v_1+v_2$. מאחר ש U_1,U_2 תתי מרחבים הם סגורים לחיבור ולכן גם $u_1+v_1\in U_1$ ו $u_2+v_2\in U_2$. אם כך

$$u+v=(u_1+u_2)+(v_1+v_2)=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)\in U_1+U_2=U$$

ולכן U סגור לחיבור. סגירות לכפל בסקלר מוכחת בצורה דומה ואנו מקבלים כי U הוא תת־מרחב וקטורי, כנדרש.

ג) נראה כי U הוא תת־המרחב המינימלי של V המכיל גם את U_1 וגם את U_2. יהיה אפוא $W\subseteq V$ תת מרחב המכיל גם הוא את שני תתי־המרחבים. יהיה $u\in U$. אזי קיימים $u_1\in U_1$ ו $u_2\in U_2$ כך ש $u=u_1+u_2$. אנו יודעים מההנחה כי $u_1,u_2\in W$, ומאחר ש W סגור לחיבור ברור כי גם $u\in W$. לכן כל איבר של U הוא איבר של W ולכן $U\subseteq W$, ולכן U הוא תת־המרחב המינימלי המכיל את U_1,U_2, כנדרש.

ד) נראה כי $U_1\cup U_2$ הוא תת־מרחב אם"ם אחד המרחבים מכיל את השני. ברור שאם זה מתקיים, בה"כ נניח $U_1\subseteq U_2$, אז $U_1\cup U_2=U_2$ מרחב וקטורי. בכיוון השני, נניח כי $U_1\cup U_2$ מרחב וקטורי. נניח בשלילה כי אף אחד משני תתי־המרחבים לא מכיל את חברו. אזי קיימים $u_1\in U_1\setminus U_2$ ו $u_2\in U_2\setminus U_1$ (כאשר $\setminus$ הוא סימן חיסור הקבוצות, כלומר $A\setminus B=\{a\in A\,|\,a\notin B\}$). מאחר ש $u_1,u_2\in U_1\cup U_2$ וזהו תת־מרחב, נקבל כי גם

$$u:=u_1+u_2\in U_1\cup U_2$$

ולכן u מוכל באחת הקבוצות, בה"כ ב U_2. אולם נשים לב כי מאחר ש U_2 תת־מרחב, ו $u,u_2\in U_2$, גם $u_1=u-u_2\in U_2$, וזו סתירה לבחירה של u_1. לכן בהכרח אחד תתי־המרחבים מכיל את חברו.