פתרונות לתרגיל 6

תאריך הגשה: 3.12.2020

תרגיל 1. קבעו האם הטור הבא מתכנס ובמידה וכן חשבו את סכומו $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}(1+n)\right)}{\ln n^{n}\ln\left((n+1)^{n+1}\right)}$

פתרון.
ראשית, נשים לב ש-

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}(1+n)\right)}{\ln n^{n}\ln\left((n+1)^{n+1}\right)} &= \\
\frac{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(1+n)}{n\cdot\ln n\cdot(n+1)\cdot\ln(n+1)} &= \\
\frac{n\cdot\ln(n+1)-n\cdot\ln n+\ln(1+n)}{n\cdot\ln n\cdot(n+1)\cdot\ln(n+1)} &= \\
\frac{(n+1)\cdot\ln(n+1)-n\ln n}{n\cdot\ln n\cdot(n+1)\cdot\ln(n+1)} & \\
\frac{1}{n\cdot\ln n}-\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)} &
\end{aligned}$$

לכן ססח יהיה שווה ל-

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}(1+k)\right)}{\ln k^{k}\ln\left((k+1)^{k+1}\right)} &&= \\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\cdot\ln k}-\frac{1}{(k+1)\cdot\ln(k+1)} &&= \\
&= \left[\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}\right]+\left[\frac{1}{3\ln 3}-\frac{1}{4\ln 4}\right]+\left[\frac{1}{4\ln 4}-\frac{1}{5\ln 5}\right]+\ldots+\left[\left(\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)\right] &&= \frac{1}{2\cdot\ln 2}-\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}
\end{aligned}$$

מכאן ניתן להסיק ש-

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}(1+n)\right)}{\ln n^{n}\ln\left((n+1)^{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot\ln 2}-\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}\right)=\frac{1}{2\cdot\ln 2}$$

תרגיל 2. הוכח שאם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ו-$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתבדר.

פתרון.
נניח השלילה שהוא מתכנס ונקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

וזה מתכנס, סתירה לכך שנתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר.

תרגיל 3. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי מתכנס

1. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)^2$ מתכנס.

2. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)^2$ מתכנס.

פתרון.

1. נשים לב שמתקיים
$$0\le\left(a_{n+1}-a_n\right)^2=a_{n+1}^2-2a_{n+1}a_n+a_n^2$$
נפרידלשלוש טורים ונראה בנפרד שכל אחד מתכנס בנפרד :
- $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}^2$: כיוון שנתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ כלומר קיים n_0 מסויים שהחל ממנו מתקיים $a_{n+1}\le 1$ כלומר החל מאותו n_0 מתקיים
$$a_{n+1}^2=a_{n+1}a_{n+1}\le a_{n+1}$$
כעת נתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס וכן מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1$ משמע מדובר בטור מתכנס ולפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}^2$ מתכנס.
- $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}a_n$: באופן דומה כיוון שנתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ כלומר קיים n_1 מסויים שהחל ממנו מתקיים $a_{n+1}\le 1$ כלומר החל מאותו n_1 מתקיים
$$a_{n+1}a_n\le a_n$$
כעת נתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס לכן ולפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}a_n$ מתכנס.
- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$: בדומה לסעיפים הקודמים גם זה מתכנס.

לפי ארתמטיקה של טורים סכומים(עם כפל בסקלר) של שלושה טורים מתכנסים הוא טור מתכנס ולכן הטור
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}^2-2a_{n+1}a_n+a_n^2$$
הוא טור מתכנס.

2. נפצל את הטור המדובר לשלוש טורים
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}2\sqrt{a_{n+1}a_n}$$
שני הטורים הראשונים מתכנסים כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. כעת ננתח את התכנסות הטור
$$\sum_{n=1}^{\infty}2\sqrt{a_{n+1}a_n}$$
לכל שני מספרים מתקיים
$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0$$
$$\Downarrow$$
$$x+y\ge 2\sqrt{xy}$$
לכן $2\sqrt{a_{n+1}a_n}\le a_{n+1}+a_n$ והטור
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}+a_n$$
מתכנס, לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם $\sum_{n=1}^{\infty}2\sqrt{a_{n+1}a_n}$ משמע $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)^2$ מתכנס.