

## פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 4: משוואות המילטון וחוקי שימור

1. הלגרנז'יאן של גוף בעל מסה  $m$  עם פוטנציאל  $U(r) = -GMm/r$  נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.

האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת? מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנז'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת

$$x \rightarrow x + \epsilon y, \quad y \rightarrow y - \epsilon x$$

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמציה הסיבוב. מהי שמורה זו?

2. ההמילטוניאן של בעית שני הגופים נתון ע"י

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

(א) רשמו את משוואות התנועה

(ב) מצאו את המסלול  $r(\theta)$  בהנחת תנאי ההתחלה  $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0$  כאשר

$$L = p_\theta \quad \text{ו} \quad r_0 = \frac{L^2}{km}$$

3. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות

$$f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), \quad g(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$$

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

(א) הוכיחו כי  $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$  כאשר  $\mathcal{H}$  ההמילטוניאן של המערכת

(ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה

$$\{f, \mathcal{H}\} = 0$$

(ג) הכלילו את תוצאת 3 לפוטנציאל כלשהוא מהצורה

$$U(x, y) = U(x^2 + y^2)$$

4. מערכת מתוארת ע"י הלגרנז'יאן  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}t$ .

(א) רשמו את פונקציות יעקובי של המערכת  $h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$

(ב) הראו כי  $\frac{\partial h}{\partial t} \neq \frac{dh}{dt}$

(ג) רשמו את ההמילטוניאן  $\mathcal{H}$  של המערכת

(ד) הראו כי  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$ . מדוע, אם כן,  $\frac{\partial h}{\partial t} \neq \frac{dh}{dt}$  למרות ששתי הפונקציות  $h, \mathcal{H}$

מקבלות את אותם ערכים?

5. הוכיחו את התכונות הבאות של סוגרי פואסון

(א) אנטיסימטריות  $\{f, g\} = -\{g, f\}$  ולכן  $\{f, f\} = 0$

(ב)  $\{f, const\} = 0$

(ג) לינאריות  $\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{f, h\}$

(ד) זהות יעקובי  $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

(ה)  $\{f, gh\} = f\{g, h\} + \{g, f\}h$

6. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י  $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ . נציג כעת את המשתנים  $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$ ,  $a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$

(א) בטאו את  $\mathcal{H}$  באמצעות  $a, a^*$ .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון  $\{a, a^*\}$ ,  $\{a, \mathcal{H}\}$ ,  $\{a^*, \mathcal{H}\}$ .

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור  $a, a^*$  ופתרו אותן.

(ד) בטאו את  $x, p$  באמצעות הפתרונות שקיבלתם.