פתרון תרגיל 9

1.א. נשים לב שהסדרה מוגדרת עבור n>2 ונראת כך: $-(\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{2}-1}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{2}-1}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{2}-1}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{2}-1}}\dots)$. נסתכל על זוגות איברים עוקבים ונסכום אותם לקבל: $\frac{1}{\sqrt{\frac{2n}{2}-1}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2n}{2}-1}}=\frac{2}{\sqrt{n}-1}$ לכל n אי זוגי.

לכן הסכומים החלקיים הזוגיים שואפים לאינסוף (כי הטור $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר) ולכן הטור שלנו מתבדר.

1.ב. ידוע כי $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}=\frac{1}{1-\mathrm{x}}$ עבור $|x|<1$ (סכום סדרה הנדסית אינסופית). נחשב:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=\sum_0^{\infty}x^n\sum_0^{\infty}x^n=\sum_0^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}x^k)=\sum_0^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}x^n)=\sum_0^{\infty}(n+1)x^n$$

(במעבר השלישי השתמשנו במכפלת קושי שכן הטור מתכנס בהחלט.)

2.א. לכל סדרה $x_0\neq x_n\to x_0$ מתקיים לפי אריתמטיקת גבולות של סדרות כי $ax^k=a\cdot x\cdot\ldots\cdot x\to ax_0^k$ ולכן מאריתמטיקה של סדרות: $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ ולכן

מתקיים: $p(x_k)=a_n{x_k}^n+\cdots+a_0\to p(x_0)$.

2.ב. ניקח $x_k=\frac{1}{\ln(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$ $y_k=\frac{1}{\ln(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)}$ סדרות ששואפות לאפס. ונשים לב ש: $f(y_k)\to -1$, $f(x_k)\to 1$