שאלה 1.

הוכיחו כי הסדרה ... $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$ מתכנסת ומיצאו את גבולה.

רמז: ראשית הגדירו אותה ע"י נוסחת נסיגה ואז הראו כי היא מונוטונית וחסומה מלעיל.

שאלה 2. תהי (a_n) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n}$ ונתון כי $a_1 > 1$.

א. הוכיחו כי (a_n) מונוטונית עולה.

ב. חשבו את גבול הסדרה (a_n).

שאלה 3. יהיו $\alpha, \beta > 0$ ונגדיר $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$ וכן $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

א. הוכיחו ש-$(a_n), (b_n)$ מתכנסות.

ב. הוכיחו כי $lim(a_n) = lim(b_n)$.

שאלה 4.

א. תהי (a_n) סדרה חסומה. הוכיחו כי קבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה היא חסומה.

רמז: השתמשו במשפט מההרצאה שאומר שאם $a_n \leq b_n$ לכל n והסדרות מתכנסות אז $lim(a_n) \leq lim(b_n)$.

ב. תנו דוגמא לסדרות מתכנסות המקיימות $a_n < b_n$ לכל n שלא מקיימות $lim(a_n) < lim(b_n)$.

ג. תנו דוגמא לסדרה לא חסומה שקבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה חסומה.

ד. תנו דוגמא לסדרה לא חסומה שקבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה איננה חסומה.

ה. תהי (a_n) סדרה. הוכיחו כי $limsup\ (-a_n) = -liminf\ (a_n)$.

שאלה 5.

מיצאו את כל הגבולות החלקיים ואת הגבול העליון והתחתון של הסדרות הבאות:

א. $a_n = (-1)^n \left(5 - \frac{4}{2^n}\right)$

ב. $a_n = sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

ג. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

ד. $a_n = \frac{2n sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{16n+14}$

שאלה 6.

א. תהי (a_n) סדרה כך שקיים לה אוסף סופי של תת-סדרות, אשר כולן מתכנסות לאותו הגבול הממשי L.

כמו כן נתון כי אוסף כל האינדקסים של כל תת-הסדרות מכסה את כל המספרים הטבעיים (בקצרה: "תת-הסדרות מכסות את הסדרה").

(מספיק להניח שהוא מכסה את כל המספרים הטבעיים החל ממיקום מסוים).

הוכיחו כי $(a_n) \to L$.

ב. הטענה איננה נכונה אם נמחק את המילה "סופי" מהניסוח של סעיף א'.

באיזה שלב בהוכחתכם השתמשתם בסופיות האוסף?

ג. הראו כי לסדרה הלא מתכנסת $(a_n) = (-1)^n$ קיים אוסף (אינסופי) של תת-סדרות המכסות את (a_n) השואפות כולן לאותו גבול ממשי.