משפט:

יהי R תחום ראשי. יהי M R-מודול נוצר סופית. אזי $M\simeq R/(d_1)\times\dots\times R/(d_n)$ כאשר:

1) n הוא הגודל המינימלי של קבוצה יוצרת של M

2) $d_i\in R$ לא הפיכים (אבל אולי 0) שמקיימים $d_1|d_2|d_3|\dots|d_n$

ה-d_i-ים הללו אפס"ם נקראים הגורמים האינווריאנטים של M

$$M\simeq R^{n-r}\times R/(d_1)\times\dots\times R/(d_r)$$

כאשר $d_1,\dots,d_r$ הגורמים האינווריאנטיים.

בנוסף, האיברים $d_1,\dots,d_n$ הם יחידים עד כדי חברות.

בפעם הקודמת הוכחנו את קיום הפירוק של M. נותר להוכיח יחידות:

משפט (מיון של מודולים נוצרים סופית מעל תחום ראשי על ידי מחלקים אלמנטריים):

יהי R תחום ראשי. M R-מודול נוצר סופית. אזי:

$$M\simeq R^t\times R/(p_1^{a_1})\times\dots\times R/(p_s^{a_s})$$

כאשר $t\ge 0$, ה-p_i-ים הם איברים אי פריקים לא אפס"ם של R, $a_i\ge 0$.

המספר t נקרא הדרגה של החלק החופשי של M. האיברים $p_1^{a_1},\dots,p_s^{a_s}$ נקראים המחלקים האלמנטריים של M. בהינתן M, המספר t והמחלקים האלמנטריים (עד כדי חברות) יחידים.

טענה:

שני המשפטים שקולים

הוכחה:

אם $M\simeq R^m\times R/(d_1)\times\dots\times R/(d_r)$, $d_1|d_2|\dots|d_r\neq 0$. יהי $d_i=p_{i1}^{a_{i1}}\cdot\ldots\cdot p_{ir_i}^{a_{ir_i}}$

הפירוק של d_i לגורמים אי פריקים (R הוא תח"י) כאשר ה-p_{ij} (עבור i נתון) שונים.

לפי משפט השאריות הסיני $R/(d_i)\simeq R/(p_{i1}^{a_{i1}})\times\dots\times R/(p_{ir_i}^{a_{ir_i}})$

לכן ניתן להציג את M בצורה של המשפט השני. הכיוון השני גם נכון. לדוגמא:

$$\mathbb{Z}^4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}^4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$$

לכן כל מודול המוצג בצורה של מחלקים אלמנטריים ניתן להציג גם בצורה של גורמים

אינווריאנטים באופן יחיד. (תרגיל)

כדי להוכיח את שני המשפטים נותר להוכיח שההצגה של M כצורה של מחלקים אלמנטריים יחידה.

טענה:

יהי R תחום ראשי, $I\lhd R$ אידאל. אם $(R/I)^n \cong (R/I)^m$ אזי $n=m$.

הוכחה:

אם I מקסימלי, אזי R/I שדה, ולכן זה ידוע מלינארית (F שדה, אזי $F^n\cong F^m \Rightarrow$

$\Rightarrow n=m$ כי המימד של מרחב וקטורי מוגדר היטב)

נטפל במקרה הכללי:

יהי $p\lhd R$ אידאל מקסימלי שמכיל את I. R תחום ראשי $\Rightarrow p=(p)$. אם $(R/I)^n\cong(R/I)^m$

אזי $\frac{(R/I)^n}{p(R/I)^n} \cong \frac{(R/I)^m}{p(R/I)^m}$. תת מודול $pM=\{pm:m\in M\}$. אם $f:M\xrightarrow{\sim}N$

איזו' של R-מודולים. אזי $f:pM\xrightarrow{\sim}pN$ ולכן $f: M/pM \xrightarrow{\sim} N/pN$

$f(m+pM)=f(m)+pN$

אך $$\frac{(R/I)^n}{p(R/I)^m} \underset{\text{תרגיל}}{\cong} \left(\frac{(R/I)}{(pR/I)}\right)^n = \left(\frac{(R/I)}{(p/I)}\right)^n \underset{\text{איזו' 3}}{\cong} (R/p)^n$$

קיבלנו $(R/p)^n\cong(R/p)^m \Rightarrow n=m$

טענה:

יהי R תחום ראשי, $d\in R$. נתבונן ב-R-מודול הציקלי $R/(d)$. יהי $a+(d)\in R/(d)$, כאשר $a\in R$.

אזי $Ann_R(a+(d))=\{r\in R: r(a+(d))=0\}=\{r\in R: ra\in(d)\}=\left(\frac{d}{gcd(a,d)}\right)$

הוכחה: תרגיל. במקרה $R=\mathbb{Z}$ המשפט הזה בעצם קובע את הסדר של $[a]\in\mathbb{Z}_d$, הוכחנו

את המקרה הזה בסמסטר א'. ההוכחה כאן זהה.

תוצאה:

יהי $m=(a_1+(d_1),\dots,a_n+(d_n))\in R/_{(d_1)}\times\dots\times R/_{(d_n)}$. אזי $Ann_R(m)=\bigcap_{i=1}^{n}Ann_R(a_i+(d_i))$

הערה: אם $a,b\in R$, R תחום ראשי, וגם $\gcd(a,b)=1$. אזי $(ab)=(a)(b)=(a)\cap(b)$

תוצאה:

יהי $M\cong R/_{(d_1)}\times\dots\times R/_{(d_n)}$ כאשר $d_1|d_2|\dots|d_n$. אזי $Ann_R(M)=\{r\in R: rm=0\ \forall m\in M\}=(d_n)$

הוכחה:

ברור כי $Ann_R(M)=\bigcap_{i=1}^{n}Ann_R(R/_{(d_n)})$ אבל $Ann_R(R/_{(d_i)})=(d_i)$. אכן. $Ann_R(R/_{(d_i)})\subseteq Ann_R(1+(d_i))=(d_i)$

מצד שני $(d_i)\subseteq Ann_R(R/_{(d_i)})$. לכן, $Ann_R(M)=(d_1)\cap\dots\cap(d_n)=(d_n)$

הוכחה: (יחידות של מחלקים אלמנטריים)

נניח $M\cong R^m\times R/_{(p_1^{a_1})}\times\dots\times R/_{(p_r^{a_r})}\cong R^n\times R/_{(q_1^{b_1})}\times\dots\times R/_{(q_s^{b_s})}$

תרגיל. על פי הנעשה קודם, $Tor(M)=\{m\in M\mid \exists r\neq 0: rm=0\}=\{m\in M\mid Ann_R(M)\neq 0\}$

כיוון שאם $f:M\to N$ איזו' של R-מודולים. אזי $Ann_R(m)=Ann_R(f(m))$ לכל $m\in M$. לכן, f משרה איזו' $Tor(M)\cong Tor(N)$. ולכן, $M/_{Tor(M)}\cong N/_{Tor(N)}$

תרגיל: בהינתן M כנ"ל

$Tor(M)\cong R/_{(p_1^{a_1})}\times\dots\times R/_{(p_r^{a_r})}\cong R/_{(q_1^{b_1})}\times\dots\times R/_{(q_s^{b_s})}$

ולכן, $R^m\cong M/_{Tor(M)}\cong R^n$

לכן בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי M הוא מודול של פיתול, כלומר $M=Tor(M)$

יותר מזה, נניח $M\cong R/_{(p_1^{a_1})}\times\dots\times R/_{(p_r^{a_r})}$. יהי $p\in R$ אי-פריק, $M=R/_{(p^{c_1})}\times\dots\times R/_{(p^{c_t})}\times$ (מכפלה של $R/_{(p_i^{a_i})}$ כאשר p_i לא חבר של p)

תרגיל:

$$\{m\in M: \exists \alpha\geq 1,\ Ann_R(m)=(p^{\alpha})\} = R/(p^{c_1})\times\dots\times R/(p^{c_t})$$

אזי האיזומורפיזם $R/(p_1^{a_1})\times\dots\times R/(p_r^{a_r}) \simeq (R/(q_1^{b_1})\times\dots R/(q_s^{b_s}))$

שומר על תת המודולים האלה. בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח

$$M\simeq R/(p^{a_1})\times\dots\times R/(p^{a_r}) \simeq (R/(q^{b_1})\times\dots R/(q^{b_s}))$$

עבור $p\in R$ אי פריק. בלי הגבלת הכלליות, $(p^{a_1}|\dots|p^{a_r})$ $\quad a_1\leq\dots\leq a_r$, $b_1\leq\dots\leq b_s$

צריך להוכיח כי $r=s$ וכי לכל $1\leq i\leq r$ $a_i=b_i$.

לפי אחד התרגילים למעלה, $Ann_R(M)=(p^{a_r})=(p^{b_s})$ לכן $a_r=b_s$. יהי $n=a_r=b_s$

נעשה אינדוקציה על n.

$n=1$: $\underbrace{R/(p)\times\dots\times R/(p)}_{r\text{ פעמים}} \simeq \underbrace{R/(p)\times\dots\times R/(p)}_{s\text{ פעמים}}$ אז $r=s$ לפי טענה 1

$n>1$: אזי $pM\simeq pR/(p^{a_1})\times\dots\times pR/(p^{a_r}) \simeq R/(p^{a_1-1})\times\dots\times R/(p^{a_r-1})$

אכן $pR/(p^a) \simeq R/(p^{a-1})$. לכן, $M\simeq R/(p^{a_1-1})\times\dots\times R/(p^{a_r-1}) \simeq R/(p^{b_1-1})\times\dots\times R/(p^{b_s-1})$

$pr+(p^a) \leftarrow\!\shortmid\ r+(p^{a-1})$

ומסיימים באינדוקציה (ה-a_i-ים הגדולים מ-1 מתאימים ל-b_i-ים הגדולים מ-1)

M/pM, וטענה 1 $\Longleftarrow$ אותו מספר של 1-ים בין ה-a_i ובין ה-b_i

יישומים של המיון:

1) $R=\mathbb{Z} \Leftarrow$ מיון של חבורות אבליות נוצרות סופית

2) יהי F שדה. ניזכר: חוג הפולינומים $F[x]$ הוא תחום אוקלידי, לכן תחום ראשי.

לפני מספר שיעורים ראינו כי $F[x]$-מודול M $\longleftrightarrow$ מרחב וקטורי V מעל F עם אנדומורפיזם
$T: V \to V$
$T(v)=xv$

יהי M $F[x]$-מודול שמתאים למרחב וקטורי ממימד סופי ($\dim_F V<\infty$). זה אומר כי M נוצר סופית כ-F-מודול, ולכן ודאי כ-$F[x]$-מודול. לפי משפט המיון (גרסה של גורמים אינווריאנטים):

$$M \cong F[x]^m \times F[x]/(d_1) \times \dots \times F[x]/(d_r)$$

כאשר $d_1 | d_2 | \dots | d_r \neq 0$. נשים לב כי $m=0$. אכן:

$$\dim_F V = m\dim_F F[x] + \sum_{i=1}^{r} \dim_F F[x]/(d_i)$$

(בקבוצות $M=V$)

אבל $F[x]$ אינסוף-מימדי מעל F. (פולינומים $\Leftarrow$ צירופים ליניאריים של $1,x,x^2,\dots$)

לכן $m=0$, כי אחרת $\dim_F V=\infty$. לכן $M= F[x]/(d_1) \times \dots \times F[x]/(d_r)$

$d_1,\dots,d_r$ מוגדרים עד כדי חברות. אם נדרוש שיהיו פולינומים מתוקנים, הם מוגדרים היטב.

יהי $d\in F[x]$, $d = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
$$F[x]/(d) = \{f+(d) : f\in F[x], \deg f<n\}$$

לכן $1+(d), x+(d), \dots, x^{n-1}+(d)$ הוא בסיס של $F[x]/(d)$ כמרחב וקטורי מעל F.

ביחס לבסיס הזה, הפעולה של x נראית כמו:

$$1\to x,\ x\to x^2,\ \dots,\ x^{n-1} \to x^n = -a_0 - a_1 x - \dots - a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\ 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{המטריצה הנלווית של } d\in F[x]} = C_d$$

טענה:

תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה. אזי A דומה למטריצה מהצורה:

$$\begin{pmatrix} C_{d_1} & & & \\ & C_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{d_n} \end{pmatrix}$$

צורה קנונית רציונלית של A

כאשר $d_1 | d_2 | \dots | d_n$ פולינומים מתוקנים מעל F. ה-d_i-ים נקראים הגורמים האינווריאנטיים של A והם מוגדרים היטב.