אינפי 1 – מדמ"ח – פתרון תרגיל 5

1. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin(\frac{12x^3-x^2+2x-1}{3x^4-1})$

פתרון: $f'(x)=\cos(\frac{12x^3-x^2+2x-1}{3x^4-1})\frac{(36x^2-2x+2)(3x^4-1)-(12x^3-x^2+2x-1)12x^3}{(3x^4-1)^2}$

ב. $f(x)=(\sin(x^2-7)+\cos(2x+5))^{10}$

פתרון: $f'(x)=10(\sin(x^2-7)+\cos(2x+5))^9(\cos(x^2-7)2x-\sin(2x+5)\cdot 2)$

ג. $f(x)=\ln(\ln(\frac{3x-12}{x^2+1}))$

פתרון: $(\frac{3x-12}{x^2+1})'=\frac{3(x^2+1)-(3x-12)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3-3x^2+24x}{(x^2+1)^2}$

לכן: $(\ln(\frac{3x-12}{x^2+1}))'=\frac{x^2+1}{3x-12}\frac{3-3x^2+24x}{(x^2+1)^2}$

לכן: $(\ln(\ln(\frac{3x-12}{x^2+1})))'=\frac{1}{\ln(\frac{3x-12}{x^2+1})}\frac{x^2+1}{3x-12}\frac{3-3x^2+24x}{(x^2+1)^2}$

ד. $f(x)=e^{x^3\sin(x)}$

פתרון: $f'(x)=e^{x^3\sin(x)}(3x^2\sin(x)+x^3\cos(x))$

ה. $f(x)=\tan(5x+\sqrt{x^2-2x-1})$

פתרון:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(5x+\sqrt{x^2-2x-1})}(5+\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x-1}}(2x-2))$$

ו. $f(x)=\sqrt[6]{7x^2-3}$

פתרון:

$f(x)=(7x^2-3)^{\frac{1}{6}}$ לכן $f'(x)=\frac{1}{6}(7x^2-3)^{\frac{-5}{6}}14x=\frac{1}{6\sqrt[6]{(7x^2-3)^5}}$

2. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x-5)^{(2x+4)}$

פתרון: $f(x)=e^{\ln((x-5)^{(2x+4)})}=e^{(2x+4)\ln(x-5)}$

לכן: $f'(x)=e^{(2x+4)\ln(x-5)}(2\ln(x-5)+\frac{2x+4}{x-5})=(x-5)^{(2x+4)}(2\ln(x-5)+\frac{2x+4}{x-5})$

ב. $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$

פתרון: $f(x)=e^{\ln((\sin x)^{(\cos x)})}=e^{\cos x\ln(\sin x)}$

לכן: $f'(x)=e^{\cos x\ln(\sin x)}(-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\frac{\cos x}{\sin x})=(\sin x)^{(\cos x)}(-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x})$

ג. $f(x)=\sin(x^{\cos x})$

פתרון: נסמן $g(x)=x^{\cos x}=e^{\ln(x^{\cos x})}=e^{\cos x\ln x}$ ואז

$g'(x)=e^{\cos x\ln x}(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x})=x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)$

ולכן: $f'(x)=\cos(x^{\cos x})x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)$

3. מצאו את הנגזרות מסדר גבוה הבאות:

א. $\frac{d^2y}{dx^2}$ עבור $y=\tan(x)$

פתרון: $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ לכן $y''=\frac{-1}{\cos^4 x}2\cos x(-\sin x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

ב. $\frac{d^2y}{dx^2}$ עבור $y=\frac{x^3-3}{x^2+2}$

פתרון: $y'=\frac{3x^2(x^2+2)-(x^3-3)2x}{(x^2+2)^2}=\frac{3x^4-2x^3+6x^2+6x}{(x^2+2)^2}$

לכן: $y''=\frac{(12x^3-6x^2+12x+6)(x^2+2)^2-(3x^4-2x^3+6x^2+6x)2(x^2+2)2x}{(x^2+2)^4}$

ג. $\frac{d^3y}{dx^3}$ עבור $y=e^{e^x}$

פתרון:

$$y'=e^{e^x}e^x$$
$$y''=e^{e^x}e^xe^x+e^{e^x}e^x=e^{e^x}e^x(e^x+1)=e^{e^x+x}(e^x+1)$$
$$y'''=e^{e^x+x}(e^x+1)(e^x+1)+e^{e^x+x}e^x=e^{e^x+x}((e^x+1)^2+e^x)$$

ד. $\frac{d^5y}{dx^5}$ עבור $y=3e^{2x+5}+16x+4$

פתרון:

$$y'=6e^{2x+5}+16$$
$$y''=12e^{2x+5}$$
$$y^{(3)}=24e^{2x+5}$$
$$y^{(4)}=48e^{2x+5}$$
$$y^{(5)}=96e^{2x+5}$$

ה. $\frac{d^{92}y}{dx^{92}}$ עבור $y=4\sin(2x-3)+6\cos(15-x)+2$

<u>**פתרון:**</u>
עבור $f(x)=4\sin(2x-3)$, כיוון שרוצים את הנגזרת ה-92, זה כמו הנגזרת ה-0 (הפונקציה עצמה), כי זו כפולה של 4. לכן $f^{(92)}=4\cdot2^{92}\sin(2x-3)=2^{94}\sin(2x-3)$.
עבור $g(x)=6\cos(15-x)$ נקבל באותו האופן $g^{(92)}=6\cdot(-1)^{92}\cos(15-x)=6\cos(15-x)$
לכן סה"כ: $y^{(92)}=2^{94}\sin(2x-3)+6\cos(15-x)$.

ו. $\frac{d^{20}y}{dx^{20}}$ עבור $y=\sin(x)\cos(x)$ [רמז: השתמשו בנוסחה של סינוס לזווית כפולה]

<u>**פתרון:**</u> $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ לכן $\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$. לכן כמו בתרגיל לעיל נקבל:

$$y^{(20)}=\frac{1}{2}\sin(2x)2^{20}=\frac{\sin(2x)}{2^{19}}$$

<u>**4. פתרון:**</u>

$f(x)=e^{nx}$ לכן $f'(x)=ne^{nx}$, $f''(x)=n^2e^{nx}$, וכו', כלומר $f^{(n)}(x)=n^ne^{nx}$. (פורמלית ניתן להוכיח נוסחא זו באינדוקציה)

<u>**5. פתרון:**</u>

$g(x)=e^{f(x)}$ לכן $g'(x)=e^{f(x)}f'(x)$ לכן $g''(x)=e^{f(x)}f'(x)f'(x)+e^{f(x)}f''(x)$ כלומר: $e^{f(x)}=e^{f(x)}(f'(x)^2+f''(x))$.

6. היעזרו במשפט הפונקציה ההפכית כדי למצוא את $\frac{dx}{dy}$ עבור $y=1+\frac{1}{x^4}$.

<u>**פתרון:**</u>
$y=1+x^{-4}$, לכן: $\frac{dy}{dx}=-4x^{-5}=\frac{-4}{x^5}$.
לכן: $\frac{dx}{dy}=\frac{-x^5}{4}$

כעת נבודד את x מהפונקציה המקורית: $y-1=\frac{1}{x^4}$ כלומר $x^4=\frac{1}{y-1}$ כלומר $x=\frac{1}{\sqrt[4]{y-1}}$.

ונציב:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{y-1}}\right)^5}{4}=\frac{-1}{4\sqrt[4]{(y-1)^5}}$$