בס"ד

פתרון תרגיל 3 - אינפי 2 מתקדם

שאלה 1:

א. נחפש נק' קיצון של הפונקציה $g(x)=\frac{1}{(1+x)(2-x)}$

בתחום $[0,1]$.

ראשית, נבדוק בקצוות: $g(0)=\frac{1}{2}$, $g(1)=\frac{1}{2}$.

נגזור ונאפס: $g'(x)=\frac{-((2-x)-(1+x))}{(1+x)^2(2-x)^2}=0$

$$\Rightarrow 2x-1=0$$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})}=\frac{4}{9}$$

זהו קטע סגור, ולכן לפי ויירשטראס מתקבלות בו נק' מקסימום ומינימום מוחלט, כלומר $\frac{1}{2}$ הוא המקסימום הגלובלי, ו-$\frac{4}{9}$ הוא מינימום גלובלי:

$$\frac{4}{9}\le\frac{1}{(1+x)(2-x)}\le\frac{1}{2}$$

לכן, לפי אי שוויון של אינטגרלים נקבל:

$$\frac{4}{9}(e-1)=\frac{4}{9}\int_0^1 e^x\,dx\le\int_0^1\frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx\le\frac{1}{2}\int_0^1 e^x=\frac{1}{2}(e-1)$$

כנדרש. ■

ב. למעשה יש להוכיח 2 אי-שוויונים. השמאלי הוא טריוויאלי כיוון שאינטגרל של ערכים חיוביים הוא אי-שלילי.

לגבי אי-השוויון הימני, נשים לב כי $\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$

ולכן לפי המשפט של אי-שוויון אינטגרל מספיק להוכיח כי: $\forall t\ge 0: e^{-t^2}\le\frac{1}{1+t^2}$

כלומר שקול להוכחת אי-השוויון $e^{t^2}\ge 1+t^2$ || להוכחה: $e^{t^2}-t^2-1\ge 0$

Scanned by CamScanner

ב-3

נוכיח כי $e^{t^2}-t^2-1=f(t)$ היא פונקציה מונוטונית עולה בתחום

בתחום $[0,\infty)$:

$$f'(t)=\left(e^{t^2}-t^2-1\right)'=2te^{t^2}-2t \overset{?}{\geq} 0$$

נחלק ב $2t>0$:

$$e^{t^2}-1\geq 0$$

וזה אכן נכון לכל $t\geq 0$.

קיבלנו פונקציה מונוטונית עולה, וכיוון ש-$f(0)=0$, נקבל כי $f(t)\geq 0$ כנדרש.

שאלה 2

א.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=$$

$$=2\sqrt{1+t}+C=\boxed{2\sqrt{1+\ln x}+c}$$

ב.

$$\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}dx=\left[\begin{matrix} t=1+\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{matrix}\;\middle|\; dx=2(t-1)dt\right]=$$

$$=\int\frac{2(t-1)^2(t-1)\,dt}{t}=2\int\frac{(t-1)^3}{t}dt$$

$$=2\int\frac{t^3-3t^2+3t-1}{t}dt=2\int\left(t^2-3t+3-\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+3t-\ln|t|\right]+c=\boxed{\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3-3(1+\sqrt{x})^2+3(1+\sqrt{x})-\ln(1+\sqrt{x})+C}$$

המשך מטלה 2

3. $$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}\,dx = \begin{bmatrix} t^2 = x+1 \\ 2t\,dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{t+2}{t^2-1-t+1}\,2t\,dt$$

$$= 2\int \frac{t+2}{t-1}\,dt = 2\int 1+\frac{3}{t-1}\,dt = 2t + 6\ln|t-1| + c$$

$$\boxed{= 2\sqrt{x+1} + 6\ln|\sqrt{x+1}-1| + c}$$

ב. $$\int x\sqrt[6]{2x+3}\,dx = \begin{bmatrix} t = 2x+3 \\ dt = 2dx \end{bmatrix} = \int \frac{t-3}{2}\cdot\sqrt[6]{t}\cdot\frac{dt}{2} =$$

$$\int \frac{t^{\frac{7}{6}}}{4}\,dt - \int \frac{3t^{\frac{1}{6}}}{4}\,dt = \frac{6}{13}\cdot\frac{t^{\frac{13}{6}}}{4} - \frac{6}{7}\cdot\frac{3t^{\frac{7}{6}}}{4} + c$$

$$\boxed{= \frac{6}{52}\sqrt[6]{(2x+3)^{13}} - \frac{18}{28}\sqrt[6]{(2x+3)^{7}} + c}$$

ה. $$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)dx$$

$$\boxed{= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + c}$$

ו. $$\int \frac{e^x}{e^x+e^{\frac{x}{2}}}\,dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = e^{\frac{x}{2}} \\ dt = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx \end{bmatrix} = \int \frac{2dt}{t+1}$$

$$= 2\ln|t+1| + c = \boxed{2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right) + c}$$

תרגיל בית 2

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \begin{bmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{bmatrix}$$ ד.

$$= \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) + c = \boxed{\arctan(x+2) + c}$$

$$\int x(1-x)^{100}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1-x \\ dt = -dx \end{bmatrix} = -\int (1-t)t^{100}\,dt$$ ה.

$$= \int t^{101} - t^{100}\,dt = \frac{t^{102}}{102} - \frac{t^{101}}{101} + C = \boxed{\frac{(1-x)^{102}}{102} - \frac{(1-x)^{101}}{101} + c}$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin x & , \; v' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & , \; v = 2\sqrt{x+1} \end{bmatrix}$$ ו.

$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x - \int \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$\boxed{= 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C}$$

$$\int x e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & , \; v' = e^{-x} \\ u' = 1 & , \; v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$ ז.

$$= \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + C}$$

$$I = \int \sin(\ln x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin(\ln x), & v' = 1 \\ u' = \frac{\cos(\ln x)}{x}, & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \cos(\ln x), & v' = 1 \\ u' = -\frac{\sin(\ln x)}{x}, & v = x \end{bmatrix}$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int -\sin(\ln x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$\Rightarrow I = \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + c$$

Scanned by CamScanner