

דף תרגילים 2 – הנחיות לפתרון

ווקטורים ב- R^3 :

1. יהיו a, b, c, d ווקטורים ב- R^3 . הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad \text{א.}$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c) \quad \text{ב.}$$

פתרון: משתמשים בהגדרות של מ"פ ומכפלה וקטורית, ומפשטים את שני הצדדים.
א.

$$\begin{aligned} \text{נסמן } a &= (a_1, a_2, a_3) \text{ וכדומה. } b \times c = (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\ a \times (b \times c) &= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3), a_3(b_2c_3 - b_3c_2) \\ &\quad - a_1(b_1c_2 - b_2c_1), a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)) \\ &= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3, a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 \\ &\quad + a_1b_2c_1, a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2) \\ &= (b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3), b_2(a_1c_1 + a_2c_2) \\ &\quad - c_2(a_1b_1 + a_3b_3), b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2)) \\ &= (b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &\quad - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &\quad - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &\quad - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)) \\ &= (b_1\langle a, c \rangle - c_1\langle a, b \rangle, b_2\langle a, c \rangle - c_2\langle a, b \rangle, b_3\langle a, c \rangle - c_3\langle a, b \rangle) \\ &= \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c \end{aligned}$$

ב.

$$(a \times b, c \times d) = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \times d \rangle &= \langle (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1), (c_2d_3 - c_3d_2, c_3d_1 \\ &\quad - c_1d_3, c_1d_2 - c_2d_1) \rangle \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ &= a_2b_3c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 - a_2b_3c_3d_2 + a_3b_2c_2d_3 + \dots \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 a_i c_i b_j d_j - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 a_i d_i b_j c_j = \# \sum_{i,j=1}^3 a_i c_i b_j d_j - \sum_{i,j=1}^3 a_i d_i b_j c_j \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i c_i \sum_{j=1}^3 b_j d_j - \sum_{i=1}^3 a_i d_i \sum_{j=1}^3 b_j c_j = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle \end{aligned}$$

2. יהיו a, b שני ווקטורים אורתונורמליים ב- R^3 . הראו ש:

- א. הווקטורים $a, b, a \times b$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב- \mathbb{R}^3
 ב. $(a \times b) \times a = b$, $(a \times b) \times b = -a$ והסבירו את המשמעות הגיאומטרית

פתרון:

3. יהיו a, b שני ווקטורים אורתונורמליים ב- \mathbb{R}^3 . הראה ש:

א. הווקטורים $a, b, a \times b$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב- \mathbb{R}^3

אורטוגונליות:

$a \perp b$ כי $a \perp b$ אורתונורמלים. לפי תכונות מכפלה וקטורית תמיד $a \times b \perp a$ ו- $a \times b \perp b$

נורמליות:

$\|a\| = \|b\| = 1$ כי a, b אורתונורמלים, למדנו ש- $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \theta$ כאשר θ היא הזווית בין a ל- b . בגלל ש- $a \perp b$ הזווית הזאת היא 90° ולכן $\|a \times b\| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1$.

ב. $(a \times b) \times a = b$, $(a \times b) \times b = -a$ והסבר את המשמעות הגיאומטרית.

לפי א.2 $(a \times b) \times a = -a \times (a \times b) = -(\langle a, b \rangle a - \langle a, a \rangle b) = -(0 \cdot a - 1 \cdot b) = b$ ו-
 $(a \times b) \times b = -b \times (a \times b) = -(\langle b, b \rangle a - \langle b, a \rangle b) = -(1 \cdot a - 0 \cdot b) = -a$

מבחינת המשמעות הגיאומטרית, גילינו ב-א' ש- $\{a, b, a \times b\}$ בסיס אורתונורמלי, אבל מכך נובע שהזוגות $\{a, a \times b\}$ ו- $\{b, a \times b\}$ גם אורתונורמליים.

לכן $(a \times b) \times a$ ניצב ל $(a \times b), a$ ואורכו כשטח המקבילית ביניהם (אורך 1) – יש רק שתי אפשרויות

לוקטור כזה $\pm b$, וכלל יד ימין קובע את הסימן. כנ"ל לגבי $(a \times b) \times b$

סכומי איינשטיין

3. בסעיפים הבאים הניחו כי $i, j \in \{1, 2, 3\}$, וכן הניחו שכל המטריצות הן מסדר 3×3 .

א. כתבו את הביטוי הבא בכתיב רגיל, ללא סימוני איינשטיין, $a^i_j b^j_k c^k_s$.

ב. תזכורת: מטריצה A היא **אידימפוטנטית** אם מתקיים $A^2 = A$. כתבו תנאי זה בסימוני איינשטיין.

ג. נתון הביטוי $\delta_{ij} a^{ij}$, פשטו אותו ככל האפשר.

ד. תהי A מטריצה הפיכה. נתון הביטוי $A_{ij} \delta^j_k A^{ki}$, פשטו אותו ככל האפשר.

פתרון:

א. $\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i_j b^j_k c^k_s$

ב. $A^i_j A^j_k = A^i_k$

ג. $\text{Trace}(A)$

ד. $A_{ij} \delta^j_k A^{ki} = A_{ij} A^{ji} = I^i_i = 3$

4. תהיינה A, B מטריצות ריבועיות, הוכיחו, בעזרת סימוני הסכימה של איינשטיין

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

5. הוכיחו שפעולת כפל מטריצות מקיימת את חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות), סמנו בסכימת איינשטיין.

6. תהיי δ^i_j פונקצית דלתא של קרונקר $i, j = 1, 2, \dots, n$ העריכו את הביטוי $\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i$ (הנתון בסימוני איינשטיין).

פתרונות ל4,5,6 (להתעלם מהמספור)

6. תהינה A, B מטריצות ריבועיות, הוכח, בעזרת סימוני הסכימה של איינשטיין $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ כמו שלמדנו, להוכחות כאלה כדאי לסמן את המטריצה עם אינדקסור אחד למעלה ואחד למטה, למשל $A = (A_j^i)$ (מסמן שורה ו- j עמודה). בניסוח הזה אם $C = AB$ אז $C_j^i = A_k^i B_j^k$ ולכן $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(C) = C_i^i = A_k^i B_i^k$. בדומה $\text{Tr}(BA) = B_i^k A_k^i$ וזה כמובן שווה ל- $\text{Tr}(AB) = A_i^k B_k^i$.

7. הוכח שפעולת כפל מטריצות הינה דסטריבוטיבית (סמן בסכימת איינשטיין)

$$(A(B + C))_j^i = A_k^i (B + C)_j^k = A_k^i (B_j^k + C_j^k) = A_k^i B_j^k + A_k^i C_j^k = (AB)_j^i + (AC)_j^i = (AB + AC)_j^i$$

8. תהיי δ_j^i פונקצית דלתא של קרונקר $i, j = 1, 2, \dots, n$, הערך את הביטוי $\delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k$ (הנתון בסימוני איינשטיין).

לפי הגדרת פונקציות דלתא של קרונקר האיבר δ_j^i הוא המקדם ה- i, j של מטריצת היחידה $I \in M_{n \times n}$ אם $i = j$ ו- 0 אחרת). $I^2 = I$ לפי נוסחאת כפל מטריצות $\delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k = \delta_k^i \delta_i^k = \delta_i^i = I_i^i$ בכל i, j . בפרט $\delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k = (\delta_j^i \delta_k^j) \delta_i^k = \delta_k^i \delta_i^k = \delta_i^i = I_i^i$ כזכור, שווה ל- $\text{Tr}(I)$ ששווה ל- n .