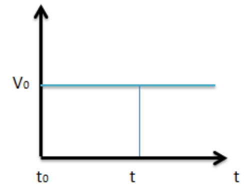
הרצאה III:

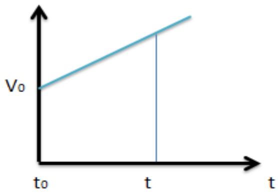


<u>המשך קינמטיקה</u>: היום נתעסק בשאלה בה התאוצה נתונה ונרצה לחשב את המיקום. במהלך השיעור נעבור לתרגילים בדו מימד. השטח מתחת לגרף (בציר מהירות זמן) מהווה את ההעתק.

וזה ניתן לראות במשוואה: $x(t)-x_0=V_0(t-t_0)$, וע״פ גזירת נקבל:

המהירות: $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(x_0-v_0t_0+v_0t)=v_0$. כמו שצפינו מראש. וכמובן, אם מדובר בפונקציה יותר מורכבת, נשתמש באינטגרל: $x(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}V(t)dt$. וע״פ מה שלמדנו בהרצאה הקודמת נקבל $x(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}\frac{dx}{dt}dt$.

נפתח ע״פ הגדרת קודמות ונקבל: $\lim_{\epsilon\to0}\frac{\int_{t_0}^{t+\epsilon}V(t)dt-\int_{t_0}^{t}V(t)dt}{\epsilon}\frac{dx}{dt}=\lim_{\epsilon\to0}\frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to0}\frac{\int_{t}^{t+\epsilon}V(t)dt}{\epsilon}=V(t)$.
עשינו מהלך זה על מנת להראות קונסיסטנטיות בין ההגדרה לכל ההגדרות הקודמות.



נעבור לעסוק בתנועה עם תאוצה קבועה. נניח שהמהירות גדלה בצורה ליניארית, ז״א :
הטענה היא שהשטח שחסום בין הגרף לציר הx מסמל את השינוי במיקום- ההעתק.
השיפוע מבטא את התאוצה, וניתן לראות כי השיפוע קבוע ולכן גם כך התאוצה, למרות שמצב כזה נדיר בחיים האמיתיים. את שטח הטרפז ניתן למצוא ע״י הנוסחה לשטח טרפז או לשטח משולש ואז להוסיף את המלבן התחתון. $S_{\text{משולש}}=\frac{b\cdot h}{2}$, $S_{\text{טרפז}}=\frac{(a+b)h}{2}$. ובמקרה שלנו ,

בעזרת הזמן והמהירות נקבל: $x(t)-x_0=\frac{(t-t_0)(V_0+V_t)}{2}=\frac{v_0t-t_0v_0+tv_t-t_0v_t}{2}=\frac{v_0t-t_0v_0+(V_0+at)(t-t_0)}{2}=v_0t+\frac{1}{2}at^2$.

ונקבל את המשוואה המוכרת : $x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$, וניתן לבדוק תוצאה זו ע״י גזירה, ונקבל את הדרוש.
למסקנה, כמו שעשינו בשיעור קודם, ניתן למצוא את תאוצת הגוף ע״י גזירה כפולה של פונקצית המיקום, ואת מיקום הגוף ע״פ התאוצה ע״י אינטגרל כפול.

עבור מהירות ניתן לרשום את המשוואה הבאה: $v(t)-v_0=a_0(t-t_0)$. מאחר והתאוצה קבועה, ניתן לבצע אינטגרל פשוט על V(t) ונקבל : $x(t)=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a(t-t_0)^2$. נסמן את היחידות בקורס שלנו במטרים, שניות וקילוגרמים, ולכן נקבל כי $[x]=m,[\dot{x}]=\frac{\text{m}}{\text{s}},[\ddot{\text{x}}]=\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
כיום ידוע שהתאוצה תלויה במהירות במהירויות נמוכות מאוד, ז״א $a=-kv$. ניתן למצוא זאת באמצעות משוואה דיפרנציאלית , מאחר והנגזרת מופיעה בפונקציה הרי התאוצה היא נגזרת של המהירות לפי הזמן. $\frac{\text{dv}}{\text{dt}}=-kv$. וניתן לנחש שהפונקציה של v תהיה $v=Ae^{-kt}$. הדרך למציאת זאת ללא ניחוש דורשת ידע במשוואות דיפרנציאליות ופתרון משוואה דיפרנציאלית ממעלה ראשונה. $V(t=t_0)=Ae^{-kt_0}=V_0$, נבודד את A ונקבל $A=V_0e^{kt_0}$. נציב במשוואה שפיתחנו ונקבל כי (ע״פ כללי חזקות) $V=V_0e^{kt_0}e^{-kt}=V_0e^{-k(t-t_0)}$. כשt שואף לאינסוף, הפונקציה שואפת ל0. הפונקציה המתקבלת היא אקספוננטציאלית. אם נבצע פעולת log נקבל גרף ליניארי של log(v) והשיפוע יהיה k–. אם k=0 מדובר במקרה של תנועה בוואקום.
מה יקרה בזמן אינסוף? נבצע אינטגרל למהירות ע״מ למצוא משוואת מיקום:
$x(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}V(t)dt=\int_{t_0}^{t}V_0e^{-k(t-t_0)}dt=\frac{v_0}{k}\left[1-e^{-k(t-t_0)}\right]$. וכאשר t שואף לאינסוף. נקבל $x_\infty=\frac{v_0}{k}+x_0$.

נעבור כעת לתיאור תנועה דו ממדית, קואורדינאטות קרטזיות. $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$. $\vec{v}(\text{t})=\lim_{\epsilon\to0}\frac{\vec{\text{r}}(\text{t}+\epsilon)-\vec{\text{r}}(\text{t})}{\epsilon}$, וניתן כמובן לפרק ולקבל כי $\vec{v}(\text{t})=\left(\lim_{\epsilon\to0}\frac{\text{x}(\text{t}+\epsilon)-\text{x}(\text{t})}{\epsilon},\lim_{\epsilon\to0}\frac{\text{y}(\text{t}+\epsilon)-\text{y}(\text{t})}{\epsilon}\right)=(\dot{x},\dot{y})=\dot{x}\hat{x}+\dot{y}\hat{y}$. בעקרון בכל בעיה נתונה ניתן להתייחס לכל ציר כתנועה בחד מימד כמו שעשינו עד כה. ואת הגודל ניתן למצוא ע״י $|\vec{v}(t)|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$. ועבור התאוצה, בצורה דומה, נקבל $\vec{a}=(\ddot{x},\ddot{y})$. ושוב, בפתרון כל בעיה ניתן להסתכל על כל ציר בנפרד ולפתור בדיוק לפי כל הנוסחאות שפיתחנו בחד מימד בהרצאה הקודמת והנוכחית.
נסמן : $\vec{x}=(v_{0,x}(t-t_0),v_{0,y}(t-t_0))$. $t=(x(t)+v_{0,x}t_0)\frac{1}{v_{0,x}}$. ונקבל $y(x)=\frac{V_{0,y}}{V_{0,x}}x$. אם המיקום שונה מאפס, נקבל חיתוך בציר y.