תרגיל 9

1. יהיו $X_1, ..., X_n$ מרחבים טופולוגיים, עם טופולוגיות τ_i ובסיסים B_i בהתאמה. הראו שהקבוצה $B_\pi = \{O_1 \times \cdots \times O_n | O_i \in B_i\}$ היא בסיס לטופולוגיית המכפלה.

2. יהיו $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה $X = \prod X_i$ (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מטריזבילי, עם המטריקה

$$d_{\max}(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) | 1 \leq i \leq n\}$$

3. יהי (X, d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה: $d : X \times X \to \mathbb{R}$ רציפה (לפי טופולוגיית המכפלה).

4. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ספרביליים. האם $X \times Y$ ספרבילי?

5. יהיו $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים טופולוגיים T_1. הוכיחו שמרחב המכפלה הוא T_1.

6. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש: $X \times Y \cong Y \times X$.

7. הוכיחו שהאותיות הבאות אינן הומיאומורפיות (כתתי קבוצות של $\mathbb{R}^2$):

$$K, B, C, D$$

8. הוכיחו שאם $f : X \to Y$ הוא הומיאומורפיזם, ו$A \subseteq X$, אז $f|_A : A \to f[A]$ הפונקציה המצומצמת, היא הומיאומורפיזם.