<u>משפט קיום ויחידות לבעיית קושי (עבור משוואה אחת מסדר ראשון)</u>

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f רציפה בתחום $D = \{|x-x_0| \leq \alpha\ ,\ \ |y-y_0| \leq \beta\}$ ומקיימת את תנאי לישפיץ בתחום D,
כלומר, קיים L כך שלכל $y_1, y_2 \in \{y_0-\beta, y_0+\beta\}$ ולכל $|x-x_0| \leq \alpha$ מתקיים:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

אזי, **קיים** פתרון **יחיד** בתחום $|x-x_0| \leq \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\sup|f|}\right\}$.

הוכחה

נפעל בשלבים.

<u>שלב א'</u>: המרה למשוואה אינטגרלית.

מתקיים:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

נוכיח כי קיים פתרון יחיד למשוואה אינטגרלית זו.

$\square$

<u>שלב ב'</u>: הגדרת סדרת פונקציות.

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\, dt$$

אינטואיציה

נגדיר:

$$T\big(g(x)\big) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, g(t)\big)\, dt$$

נוכיח שהוא אופרטור מכווץ:

$$||Tg_1 - Tg_2||_\infty < c \cdot ||g_1 - g_2||_\infty \,, \quad 0 < c < 1$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\ dt \right| \\ &\le |x - x_0| \cdot \sup\ |f| \\ &\le \beta \end{aligned}$$

אינדוקציה מראה כי לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y_n מוגדרת (ואפילו רציפה וגזירה).

$\square$

<u>**שלב ג'**</u>: להוכיח כי הסדרה $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנס במידה שווה.

<u>טענה</u>

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \sup\ |f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>הוכחה</u>

באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0(t)\big)\ dt \right| \\ &\le |x - x_0| \cdot \sup\ |f| \end{aligned}$$

אינטואיציה

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1}(x)-y_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left[f\left(t,y_n(t)\right)-f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\right]\,dt\right| \\
&\le |x-x_0|\cdot||f\left(t,y_n(t)\right)-f\left(t,y_{n-1}(t)\right)|| \\
&\le |x-x_0|\cdot L||y_n-y_{n-1}||
\end{aligned}
$$

זוהי הוכחה לכך שהאופרטור מכווץ.

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1}(x)-y_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left[f\left(t,y_n(t)\right)-f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\right]\,dt\right| \\
&\le \int_{x_0}^{x}\left|f\left(t,y_n(t)\right)-f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\right|\,dt \\
&\le \int_{x_0}^{x} L\cdot|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\,dt \\
&\le \int_{x_0}^{x} \sup|f|\cdot L^n\cdot\frac{|x-x_0|^n}{n!}\,dt \\
&\le \sup|f|\cdot L^n\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

$\square$

לכן:

$$
||y_{n+1}-y_n||_\infty \le \sup|f|\cdot L^n\cdot\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0
$$

נסמן:

$$M_n := \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$$

עפ״י הגדרת סדרת הפונקציות $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$y_N = y_0 + \sum_{n=1}^{N} (y_n - y_{n-1})$$

לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$||y_{n+1} - y_n||_\infty \leq M_n$$

מתקיים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

עפ״י מבחן ה $M -$ של ויירשטרס, הסדרה $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה.

נסמן : $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{u} y$.

$\square$

<u>שלב ד׳</u> : להוכיח כי y פותר את המשוואה.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\ dt \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f\big(t, y_n(t)\big)\ dt \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\right)\ dt \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\ dt
\end{aligned}$$

לכן :

$$y(x) \quad = \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\ dt$$

$$\square$$

<u>שלב ה'</u>: הוכחת יחידות.

יהי $\mathcal{y}$ פתרון.

$$\mathcal{y}(x) \quad = \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \mathcal{y}(t)\big)\ dt$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{y} - y_0| \quad &= \quad \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, \mathcal{y}(t)\big)\ dt\right| \\ &\leq \quad |x - x_0| \cdot \sup|f| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{y} - y_n| \quad &= \quad \left|\int_{x_0}^{x} \left[f\big(t, \mathcal{y}(t)\big) - f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\right]\ dt\right| \\ &\leq \quad \int_{x_0}^{x} \left|f\big(t, \mathcal{y}(t)\big) - f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\right|\ dt \\ &\leq \quad \int_{x_0}^{x} L \cdot |\mathcal{y}(t) - y_{n-1}(t)|\ dt \\ &\leq \quad \int_{x_0}^{x} \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!}\ dt \\ &\leq \quad \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

לכן:

$$|\mathscr{y} - y_n| \quad \leq \quad \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

לכן:

$$\mathscr{y} = y$$

$\square$

לכן, **קיים** פתרון **יחיד** לבעיית קושי בתחום $|x - x_0| \leq \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\sup|f|}\right\}$.

$\blacksquare$