יש כאן הצילומים של התרגולים, תודה לנורית על המאמץ הרב, יש דפים לא ברורים. אתכם הסליחה.

$\Downarrow$

כלומר: נותר להוכיח ש:

$$\frac{9k-1}{10(k+1)}^{/(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}^{/10} \geq \frac{9k+8}{10(k+2)}^{/(k+1)} \quad / \cdot 10(k+1)(k+2)$$

$\Downarrow$

$$(9k-1)(k+2)+10 \geq (k+1)(9k+8)$$

$\Downarrow$

$$\cancel{9k^2}-k-2+18k+10 \geq \cancel{9k^2}+9k+8k+8$$

$$17k+8 \geq 17k+8$$

$\Downarrow$

מתקיים!

מ.ש.ל.

[illegible]:

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}>\frac{9k-1}{10(k+1)}$$

צ"ל עבור $n=k+1$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}>\frac{9k+8}{10(k+2)}$$

הוכחה:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\overbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}}^{A}+\overbrace{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}^{B}$$

[illegible]

$$A>\frac{9k-1}{10(k+1)}$$

$\Downarrow$

[illegible]

$$\frac{9k-1}{10(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{(9k-1)(k+2)+10}{10(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{9k^2-k+18k-2+10}{10(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{9k^2+17k+8}{10(k+1)(k+2)}=\frac{\cancel{(k+1)}(9k+8)}{10\cancel{(k+1)}(k+2)}=$$

$$=\frac{9k+8}{10(k+2)}$$

$\Downarrow$

$\frac{9k+8}{10(k+2)}$ [illegible] $A+B$ [illegible]

[illegible]

$9k^2+17k+8=$

פירוק [illegible]

$9+8=17$

$9\cdot 8=72$

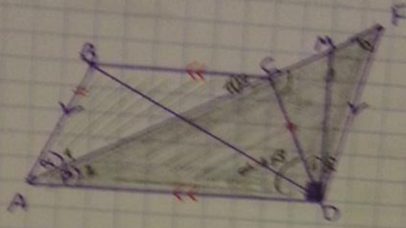
$\Downarrow$

$=9k^2+9k+8k+8=$

$=9k(k+1)+8(k+1)=$

$=(k+1)(9k+8)$

שאלה 3



נתון:

ABCD [illegible] שווה שוקיים

$(BC \parallel AD \,,\, AB = CD)$

$AD \perp MD$

$AB \parallel DF$

$\sphericalangle CAD = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$

א) $\triangle ABC \sim \triangle FDA$

ב) $\sphericalangle CDM = \sphericalangle MDF$

ג) $\frac{AC}{AF} = \frac{DC}{MF}$

הוכחה:

נתון $BC \parallel AD$

$\Downarrow$

③ $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle A_2 = \beta$ [illegible]

נתון $AB \parallel FD$

$\Downarrow$

⑤ $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle F = \alpha$ [illegible]

$\Downarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle FDA$ [illegible]

[illegible] ABCD [illegible]

$\Downarrow$

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA$ [illegible]

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 = \alpha + \beta$ [illegible]

$\Downarrow$

$\sphericalangle CDA = \alpha + \beta$ [illegible]

$\sphericalangle ADM = 90^\circ$ [illegible] $AD \perp MD$

$\Downarrow$

$\sphericalangle CDM = \sphericalangle ADM - \sphericalangle ADC$ [illegible]

$\Downarrow$

$\sphericalangle CDM = 90 - (\alpha + \beta)$

$\sphericalangle FCD = \sphericalangle A_2 + \sphericalangle CDA = 2\beta + \alpha$ [illegible]

([illegible] $\sphericalangle FCD$ [illegible] $\triangle ACD$)

$\Downarrow$

$\sphericalangle CMD = 180 - (2\beta + \alpha) - [90 - (\alpha + \beta)]$ [illegible] $\triangle CDM$ [illegible]

$\Downarrow$

$\sphericalangle CMD = 180 - 2\beta - \cancel{\alpha} - 90 + \cancel{\alpha} + \beta$

$\Downarrow$

$\sphericalangle CMD = 90 - \beta$

$\measuredangle CMD = \measuredangle F + \measuredangle MDF$ זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

$\Downarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\measuredangle MDF = \measuredangle CMD - \measuredangle F \\ \Downarrow \\ \measuredangle MDF = 90 - \beta - \alpha\end{array}\right.$$

$$\underline{\measuredangle MDF = 90 - (\alpha + \beta)}$$

$\Downarrow$

$\measuredangle MDF = \measuredangle CDM$ לפי המעבר

מש"ל ב

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{CM}{MF} = \frac{CD}{DF}}$ לפי משפט חוצה זווית

$\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{AF}$ לפי יחס הדמיון (לפי סעיף א)

$AB = CD$ במקבילית הצלעות הנגדיות שוות

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{CD}{DF} = \frac{AC}{AF}}$ לפי המעבר

$\Downarrow$

$\frac{CM}{MF} = \frac{AC}{AF}$ לפי המעבר

מש"ל ג.

22.11.2016

תרגיל מס' 3

שאלה בסדרות:

סדרה חשבונית:

איבר כללי: $a_n = a_1 + (n-1)d$

סכום: $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$

1)

	הסדרה הנתונה	הסדרה החדשה
איבר ראשון	$a_1 \neq 0$	$4a_1$
הפרש הסדרה	d	d
מס' האיברים	n	n
סכום האיברים	$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$	$S_n = \frac{n}{2}\left[8a_1 + d(n-1)\right]$

א)

$$\frac{n}{2}\left[8a_1 + d(n-1)\right] = \cancel{2}\cdot\frac{n}{\cancel{2}}\left[2a_1 + d(n-1)\right] \quad /: n \neq 0$$

$$\frac{1}{2}\left[8a_1 + d(n-1)\right] = 2a_1 + d(n-1) \quad /\cdot 2$$

$$8a_1 + d(n-1) = 4a_1 + 2d(n-1)$$

$$8a_1 + dn - d = 4a_1 + 2dn - 2d$$

$$4a_1 = dn - d$$

$$a_1 = \frac{d(n-1)}{4}$$

ד)

	הסדרה הנתונה	הסדרה החדשה (לאחר שמגדילים את הפרש הסדרה ב-3)
האיבר הראשון	a_1	a_1
הפרש הסדרה	d	$d+3$
מס' האיברים	n	n
סכום האיברים	$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$	$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (d+3)(n-1)\right]$

$$2\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}\left[2a_1+d(n-1)\right]=\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}\left[2a_1+(d+3)(n-1)\right]$$

$$2\left[2a_1+d(n-1)\right]=2a_1+(d+3)(n-1)$$

$$4a_1+2dn-2d=2a_1+dn+3n-d-3$$

$$2a_1+dn-d=3n+3$$

מסעיף I קיבלנו ש:

$$a_1=\frac{d(n-1)}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2d(n-1)}{4}+dn-d=3n+3 \qquad /\cdot 4$$

$$2dn-2d+4dn-4d=12n+12 \qquad /:2$$

$$dn-d+2dn-2d=6n+6$$

$$-3d+3dn=6n+6 \qquad /:3$$

$$-d+dn=2n+2$$

$$-d(1+\cancel{n})=2(n+\cancel{1}) \qquad /:(n+1)$$

$$d=2$$

מ.ש.ל

ב)

$a_1, a_2, \ldots\ a_n, \ldots\ a_k$

$\Downarrow$

md

נאמר m טבעי

מכיוון שנתון: $a_1 = md$

הפרש הסדרה: $d \neq 0$

א) (1)

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$\Downarrow$$
$$a_n = md + d(n-1)$$
$$\Downarrow$$
$$a_n = d(m+n-1)$$

$$a_k = a_1 + d(k-1)$$
$$\Downarrow$$
$$a_k = md + d(k-1)$$
$$\Downarrow$$
$$a_k = d(m+k-1)$$

$$a_n + a_k = d(m+n-1) + d(m+k-1)$$
$$\Downarrow$$
$$a_n + a_k = d[m+n-1 + m+k-1]$$
$$a_n + a_k = d(2m+n+k-2)$$
$$\Downarrow$$
$$a_n + a_k = 2md + d(n+k-2)$$
$$a_n + a_k = md + md + d(n+k-2)$$
$$\Downarrow$$
$$a_n + a_k = \underbrace{md}_{\text{זה } a_1} + d(m+n+k-2)$$
$$\Downarrow$$
$$a_n + a_k = a_1 + d(m+n+k-2)$$ מ.ש.ל.

א) (2)

(נקח איבר במקום p a_p ונמצא את מיקומו p.) $\Leftarrow$ $a_p = a_k + a_n$

מצמצם קודם

$$\cancel{a_1} + d(p-1) = \cancel{a_1} + d(m+n+k-2)$$
$$\Downarrow$$
$$\cancel{d}(p-1) = \cancel{d}(m+n+k-2) \quad /:d\neq 0$$
$$p-1 = m+n+k-2$$
$$\Downarrow$$
$$p = m+n+k-1$$
$$\Downarrow$$
$$a_{m+n+k-1} = a_n + a_k$$

$a_{34} + a_{65} = ?$ צ"ל: (1)ג

$a_1 + d \cdot 33 + a_1 + d \cdot 64 =$

$= md + 33d + md + 64d =$

$= d(m + 33 + m + 64) =$

$= d(2m + 97) =$

$= 2dm + 97d =$

$= dm + dm + 97d =$

$= a_1 + d(m + 97)$

$a_{34} + a_{65} = a_{109}$ נתון: (2)ג

$\Downarrow$

מסעיף ג(1)

$\cancel{a_1} + d(m+97) = \cancel{a_1} + 108d$

$\cancel{d}(m+97) = 108\cancel{d} \quad /: d \neq 0$

$m + 97 = 108$

$m = 11$

$S_{79} = 7900$

$\Downarrow$

$7900 = \frac{79}{2}[2a_1 + d \cdot 78]$

$7900 = \frac{79}{2}[2dm + 78d] \quad /:79$

$1000 = \frac{1}{2}[22d + 78d]$

$2000 = 22d + 78d$

$2000 = 100d \quad /:100$

$\Downarrow$

$d = 2$

שאלות באינדוקציה

1) הוכח שעבור כל N טבעי זוגי - הביטוי הבא מתחלק ב-48 ללא שארית: n^3+20n

* נבדוק עבור $N=2$:

$$2^3+20\cdot 2 = 8+40 = 48$$

48 מתחלק ב-48 ללא שארית
הטענה נכונה עבור $n=2$

* נניח כי עבור $N=k$ (k זוגי) מתקיים: k^3+20k מתחלק ב-48 ללא שארית

הנחת האינדוקציה

* נוכיח כי עבור $N=k+2$ מתקיים: $(k+2)^3+20(k+2)$ מתחלק ב-48 ללא שארית

צעד

הוכחה:

$$(k+2)^3+20(k+2) =$$
$$= (k+2)\left[(k+2)^2+20\right] =$$
$$= (k+2)(k^2+4k+24) =$$
$$= k^3+2k^2+4k^2+8k+24k+48 =$$
$$= \underbrace{k^3+20k}+4k+6k^2+8k+\underbrace{48}_{\text{מתחלק ב-48}}$$

מתחלק ב-48 ללא שארית לפי הנחת האינדוקציה

נותר לנו להוכיח ש: $6k^2+12k$ מתחלק ב-48 ללא שארית

$$= 6k(\underbrace{k+2})$$

זוגי k, זוגי $k+2$

נניח כי $k=2$ [illegible]

$$12\cdot(2+2)=12\cdot 4=48$$

מתחלק ב-48

לכן [illegible] $6k(k+2)$ מתחלק ב-48

מ.ש.ל

2) הוכח שעבור כל N טבעי גדול מ-1 מתקיים:

כלומר עבור כל $N \geq 2$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

* נבדוק עבור $N=2$:

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2} \overset{?}{>} \frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \overset{?}{>} \frac{13}{24} \rightarrow \frac{4+3}{12} \overset{?}{>} \frac{13}{24}$$

$$\frac{14}{24} > \frac{13}{24} \checkmark$$

עבור $N=2$ הטענה נכונה

הבדיקה הבסיסית נכונה ✓.

* הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $N=k$ מתקיים: (k טבעי גדול מ-1)

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\dots+\frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

* צ"ל: נוכיח כי עבור $N=k+1$ מתקיים:

$$\underbrace{\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+5}+\dots+\frac{1}{2k+2}}_{A} > \underbrace{\frac{13}{24}}_{B}$$

צ"ל: $A > B$

* הוכחת האינדוקציה:

נשפר את ההנחה:

נו ההנחה האינדוקטיבית

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{2k} > \frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}}$$ זוהי בעצם הנחת האינדוקציה

$$\Downarrow$$

(*) אז: מההנחה נקבל:

$$\underbrace{\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}}_{A} > \underbrace{\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}}_{C}$$

$$\Downarrow$$

כלומר שקיבלנו: $A > C$, וכדי להוכיח ש: $A>B$

נותר להוכיח ש: $C>B$

$$\cancel{\frac{13}{24}}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} > \cancel{\frac{13}{24}}$$

כלומר נותר להוכיח ש:

$$\frac{-1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} > 0$$

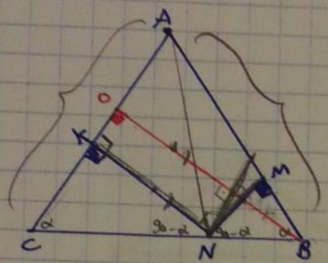
$$\frac{-4k-\cancel{2}+2k+\cancel{2}+2k+1}{2(k+1)\cdot(2k+1)} > 0$$

$$\frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0 \quad / \cdot 2(k+1)(2k+1)$$

$$1 > 0$$

זה מתקיים

מ.ש.ל.



שאלה בגאומטריה:

<u>נתון:</u> $\triangle ABC$ משו״ש $(AB=AC)$

N נק׳ באמצע הבסיס CB

$NM \perp AB$

$NK \perp AC$

$BO \perp AC$

<u>הוכח:</u> $OB = MN + KN$

נתחבר את AN - בניית עזר

$$S_{\triangle ACN} = \frac{KN \cdot AC}{2}$$

$$S_{\triangle ANB} = \frac{MN \cdot AB}{2}$$

חיבור שטחים - הם אותו שטח כמו

$$\Rightarrow \frac{KN \cdot AC}{2} + \frac{MN \cdot AB}{2} = S_{\triangle ABC}$$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{KN \cdot AC + MN \cdot AB}{2}$$

$AB=AC$ נתון משו״ש

$\Downarrow$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{KN \cdot AC + MN \cdot AC}{2} = \frac{AC(KN+MN)}{2}$$

נגדיר שוב $S_{\triangle ABC} = \frac{OB \cdot AC}{2}$

$\Downarrow$

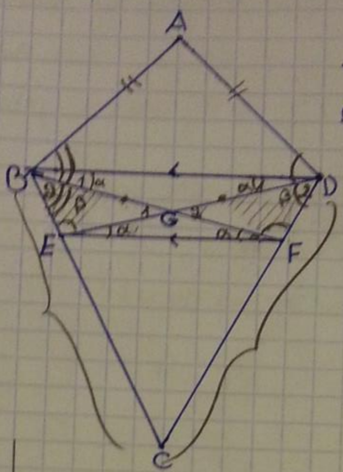
כלל המספר $\frac{\cancel{AC} \cdot OB}{2} = \frac{\cancel{AC}(KN+MN)}{2}$

$\Downarrow$

$OB = KN + MN$ מש״ל.

(1)

שאלות חזרה:



נתון: ABCD דלתון: $AB=AD$

$BC=DC$

DE חוצה $\angle ADC$

BF חוצה $\angle ABC$

הוכח: א) (1) $GB=GD$

(2) $\triangle BGE \cong \triangle DGF$

ב) DBEF טרפז שו"ש.

הוכחה:

	טענה	נימוק
(1)	ABCD דלתון: $AB=AD$, $BC=DC$	נתונים
(2)	DE חוצה $\angle ADC$ ($\angle ADE=\angle EDC$)	נתון
(3)	BF חוצה $\angle ABC$ ($\angle ABF=\angle CBF$)	נתון
(4)	$\angle ABD=\angle ADB$	במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות (1)
(5)	$\angle DBC=\angle BDC$	במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות (1)
(6)	$\angle ABD+\angle DBC=\angle ADB+\angle BDC$	סכום זוויות שוות (4,5)
(7)	$\angle ABC=\angle ADC$	* הוכחנו, בסכום, שזוויות הבסיס של דלתון שוות.
(8)	$\angle ADE=\angle EDC=\angle ABF=\angle CBF$	לל במספר (2,3,7)
(9)	$\angle ABF-\angle ABD=\angle ADE-\angle ADB$	חיסור זוויות שוות (8,4)
(10)	$\angle DBG=\angle BDG$	
(11) ③	$BG=DG$	במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות (10) מש"ל א' (1)
(12) ⑤	$\angle EBG=\angle FDG$	הוכח בסעיף (8)
(13) ⑤	$\angle G_1=\angle G_2$	זוויות קודקודיות שוות.
(14)	$\triangle BGE \cong \triangle DGF$	לפי ז.צ.ז. (11,12,13) מש"ל א' (2)
(15)	$\angle B_1=\angle D=\alpha$	סימון (10)
(16)	$\angle B_2=\angle D_2=\beta$	סימון (8)
(17)	$\angle DBE=\angle BDF=\alpha+\beta$	השלם שווה לסכום חלקיו (15,16)
(18)	$\angle BED=180-(\alpha+\beta)-\alpha$ $\angle BED=180-2\alpha-\beta$	סכום זוויות ב-$\triangle BDE$ 180° (15,16)
(19)	$\angle DFB=180-(\alpha+\beta)-\alpha$ $\angle DFB=180-2\alpha-\beta$	סכום זוויות ב-$\triangle BFD$ 180° (15,16)
(20)	$\angle EGF=\angle B_2+\angle BED$ $\Downarrow$ $\angle EGF=\cancel{\beta}+180-2\alpha\cancel{-\beta}$ $\angle EGF=180-2\alpha$	זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה (18,19,16)
(21)	$EG=FG$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים (14)
(22)	$\angle GEF=\angle GFE$ $\Downarrow$	במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות (21)
(23)	$\angle GEF=\angle GFE=\alpha$	סכום זוויות ב-$\triangle GEF$ 180° (20)
(24)	$\angle DBE=\alpha+\beta$	השלם שווה לסכום חלקיו (15,16)
(25)	$\angle BEF=180-2\alpha-\beta+\alpha$ $\Downarrow$ $\angle BEF=180-\alpha-\beta$	השלם שווה לסכום חלקיו (23,18)
(26)	$\angle BEF+\angle DBE=$ $=180-\alpha-\beta+(\alpha+\beta)=180^\circ$	(24,25)
(27)	$BD \parallel EF$	סכום הזוויות החד-צדדיות 180°, ולכן הישרים מקבילים (26)
(28)	$\angle BDE+\angle BDF=2\alpha+2\beta$	(17)

סעיף ב: נוכיח קודם כי המרובע DBEF טרפז!

נראה שהבסיס BD ו EF מקבילים (הצלע DF ו BE לא מקבילים)

$\measuredangle BDE + \measuredangle BDF \neq 180°$	דרך השלילה: אם סכומם 180° אז $2\alpha+2\beta=180°$ ולכן $\alpha+\beta=90°$ וזה סותר את הנתון: ש ABCD מלבן
$BE \nparallel DF$	סכום הזוויות החד-צדדיות אינו 180° ולכן הישרים לא מקבילים (29)
DBEF טרפז	מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות הוא טרפז (30,27)
$BE = DF$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים (14)
DBEF טרפז ש"ש	טרפז ששוקיו שוות הוא טרפז ש"ש (31,32)
	מש"ל.

הערה: ⊛ ניתן להוכיח שהוא טרפז ש"ש
ע"י כך שהזוויות $\measuredangle DBE = \measuredangle BDF$
שהרי, טרפז שזוויות הבסיס שלו שוות הוא טרפז ש"ש

⊛ ואפשר גם ע"י כך שנוכיח שהאלכסונים שווים:

$$\left.\begin{aligned} BG &= DG \\ EG &= FG \end{aligned}\right\}$$ צלעות מתאימות במשולשים חופפים (14)

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} BG + GF &= DG + GE \\ &\Downarrow \\ BF &= DE \end{aligned}\right\}$$ חיבור קטעים שווים

$$\Downarrow$$

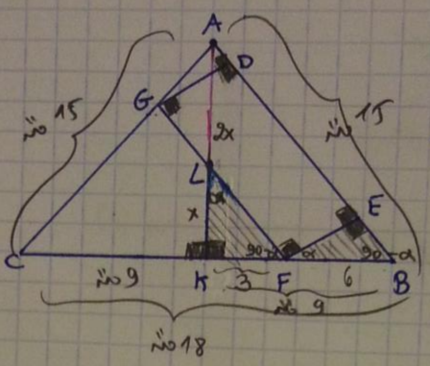
DBEF טרפז ש"ש שהרי, טרפז שאלכסוניו שווים הוא טרפז ש"ש.

(2) נתון: △ABC שו"ש (AC=AB)

GFED מלבן

L מפגש התיכונים ב-△ABC

$LK \perp BC$



צ"ל: (ב) $\triangle KAB \sim \triangle KLF \sim \triangle EFB$ ✓

(ג) נתון: $AB = 15$ ס"מ, $BC = 18$ ס"מ

$KF = ?$ (צריך לחשב את אורך KF) ✓

(ד) $EF = ?$ (צריך לחשב את אורך EF)

הוכחה:

	טענה	נימוק
(1)	△ABC שו"ש (AC=AB)	נתון
(2)	GFED מלבן	נתון
(3)	L נק' מפגש התיכונים ב-△ABC	נתון
(4)	$LK \perp BC$ ($\sphericalangle LKF = \sphericalangle LKC = 90°$)	נתון
(5)	AL תיכון	
(6)	L על LK האנך ל-BC (4) ו-L נק' מפגש התיכונים (5) ⇓	
(7)	AL המשך של LK	במשו"ש התיכון לבסיס הוא גם גובה וחוצה זווית (1,3,4); הסברנו שהנקודות A, L, K על ישר אחד
(8)	$\sphericalangle KLF = \alpha$	סימון
(9)	$\sphericalangle LFK = 90 - \alpha$	סכום זוויות במשולש △LKF 180° (8,4)
(10)	$\sphericalangle GFE = \sphericalangle DEF = \sphericalangle EDG = \sphericalangle DGF = 90°$	במלבן כל הזוויות ישרות (2)
(11)	$\sphericalangle EFB = \alpha$	זוויות הצמודות על ישר אחד - סכומן 180° (10,9)
(12)	$\sphericalangle FEB = 90°$	סכום זוויות צמודות 180° (10)
(13)	$\sphericalangle B = 90 - \alpha$	סכום זוויות ב-△EFB 180° (11,12)
(14)	$\sphericalangle KAB = \alpha$	סכום זוויות ב-△ABC 180° (4,13)
(15) ③	$\sphericalangle B = \sphericalangle LFK = 90 - \alpha$	כלל המעבר (13,9)
(16) ③	$\sphericalangle LKF = \sphericalangle FEB = 90°$	כלל המעבר (4,12)
(17) ③	$\sphericalangle KLF = \sphericalangle EFB = \alpha$	כלל המעבר (8,11)
(18)	$\triangle LKF \sim \triangle FEB$	לפי ז.ז.ז. (15,16,17)
(19) ③	$\sphericalangle B = \sphericalangle B$	זווית משותפת
(20) ③	$\sphericalangle AKB = \sphericalangle BEF = 90°$	כלל המעבר (4,12)
(21) ③	$\sphericalangle KAB = \sphericalangle EFB = \alpha$	כלל המעבר (14,11)
(22)	$\triangle KAB \sim \triangle EFB$	לפי ז.ז.ז. (19,20,21)
(23)	$\triangle KAB \sim \triangle FEB \sim \triangle KLF$	כלל המעבר (18,22) מש"ל ב
(24)	$BC = 18$ ס"מ, $AB = 15$ ס"מ	נתונים
(25)	$CK = BK = 9$ ס"מ	במשו"ש התיכון לבסיס הוא גם גובה, תיכון לבסיס (1,4)
(26)	$LK = x$, $AL = 2x$	נק' מפגש התיכונים מחלקת את התיכון כך שהחלק שקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק שקרוב לבסיס (3) + סימון
(27)	$AK = AL + LK = 3x$	השלם שווה לסכום חלקיו (26)
(28)	$\frac{AK}{LK} = \frac{BK}{FK}$ ⇓	יחס הדמיון במשולשים דומים (23)
(29)	$\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{9}{FK}$ ⇓ $3FK = 9$ /:3 $FK = 3$ ס"מ	הצבות (28,25,24,26,27) מש"ל ג

(30)	$FB = KB - KF = 6$ ס"מ	השלם שווה לסכום חלקיו (29, 25)
(31)	$\frac{EB}{AB} = \frac{EF}{KA}$ $\Downarrow$ $\frac{6}{15} = \frac{EF}{3x}$	יחס הדמיון (23) במשולשים דומים הצבות (31, 27, 24, 30)
(32)	$AK^2 + KB^2 = AB^2$ $\Downarrow$	לפי פיתגורס במשולש ישר-זווית $\triangle ABK$ (4)
(33)	$(3x)^2 + 9^2 = 15^2$ $9x^2 + 81 = 225$ $9x^2 = 144 \quad /:9$ $x^2 = 16$ $\Downarrow$ $x = 4$ $\Downarrow$ $AK = 3x = 12$ ס"מ	הצבות (32, 24, 25, 27)
(34)	$\frac{6}{15} = \frac{EF}{12}$ $\Downarrow$ $EF = 4.8$ ס"מ	הצבה (31, 33) מ.ש.ל ג.

שיעורי בית - תרגיל מס' 3

שאלה 1 (סדרה חשבונית)

סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הכלל:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n + a_{n+1} = 4n+2 \end{cases}$$

א) אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

פיתרון:

בסדרה יש 100 איברים ולכן שני האיברים האמצעיים (העומדים במקומות האמצעיים) הם: האיבר במקום ה-50 a_{50} והאיבר במקום ה-51 a_{51}

$$a_n + a_{n+1} = 4n+2$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{(n=50)}{a_{50} + a_{51}} = 4 \cdot 50 + 2 = 200 + 2 = 202$$

ב) הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית.

פיתרון:

$$a_n + a_{n+1} = 4n+2$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 4n - a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = 4n+2-a_n$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+2} = 4(n+1)+2-a_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+2} = 4n+4+2-a_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+2} = 4n+6-a_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+2} = 4n+6-(4n+2-a_n)$$

$$a_{n+2} = \cancel{4n}+6-\cancel{4n}-2+a_n$$

$$a_{n+2} = 4+a_n$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+2} - a_n = 4$$

$$\Downarrow$$

האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית שהפרשה 4

כמו-כן, האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית שהפרשה 4.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ב) את האיבר העומד באמצע הסדרה

ג) את הסכום של כל איברי הסדרה

$a_n + a_{n+1} = 4n+2$

$\Downarrow$

$a_1 + a_2 = 4\cdot 1+2$

נתון $a_1=4$

$\Downarrow$

$\cancel{4} + a_2 = \cancel{4}+2$

$a_2 = 2$

	סדרה I האיברים במקומות האי-זוגיים	סדרה II האיברים במקומות הזוגיים
האיבר הראשון	נתון $a_1=4$	$a_2=2$
הפרש הסדרה	4 מסעיף ג	4 מסעיף ג
מס' האיברים	51	50
סכום האיברים	$S_{51} = \frac{51}{2}\left[2\cdot 4 + 4\cdot 50\right] = 5304$	$S_{50} = \frac{50}{2}\left[2\cdot 2 + 4\cdot 49\right] = 5000$

$\Downarrow$

$S_{\text{סכום כל איברי הסדרה}} = 5000 + 5304 = 10,304$

ד) האיבר העומד באמצע הסדרה הוא האיבר במקום ה-51: $a_{51}=?$ וזהו איבר העומד במקום אי-זוגי ולכן נמצא גם בסדרה החשבונית המורכבת מהאיברים שבמקומות האי-זוגיים: האיבר הראשון הוא 4

הפרש הסדרה הוא: 4

אבל עלינו למצוא את האיבר ה- a_{26} כלומר במקום ה-26

(מבין האיברים האי זוגיים)

$\Downarrow$

a_{26} האיבר במקום ה-26 באי-זוגיים $= 4 + 4\cdot 25 = 4 + 100 = 104$

שאלה 3:

בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.
סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.
הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

פתרון:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{n \text{ האיברים הראשונים}},\ \underbrace{a_{n+1}, \dots, a_{2n}}_{n \text{ האיברים האמצעיים}},\ \underbrace{a_{2n+1}, \dots, a_{3n}}_{n \text{ האיברים האחרונים}}$$

$$\underbrace{S_{3n} - S_{2n}}_{\text{סכום } n \text{ האיברים האחרונים}} = 2 \cdot \underbrace{(S_{2n} - S_n)}_{\text{סכום } n \text{ האיברים האמצעיים}}$$

$\Downarrow$

$$S_{3n} - S_{2n} = 2S_{2n} - 2S_n$$

$$2S_n = 3S_{2n} - S_{3n}$$

$\Downarrow$

$$2S_n = 3 \cdot \frac{2n}{2}\left[2a_1 + d(2n-1)\right] - \frac{3n}{2}\left[2a_1 + d(3n-1)\right]$$

$$2S_n = 3n\left[2a_1 + 2dn - d\right] - 1.5n\left[2a_1 + 3dn - d\right]$$

$$2S_n = 6na_1 + 6dn^2 - 3dn - 3na_1 - 4.5n^2d + 1.5nd$$

$$2S_n = 1.5dn^2 + 3na_1 - 1.5dn$$

$\Downarrow$

$$2S_n = \frac{3n}{2}\left[dn + 2a_1 - d\right]$$

אחרי סידור

$\Downarrow$

$$2S_n = \frac{3n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$$

$\Downarrow$

$$2S_n = 3 \cdot \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$$

זה שווה ל-S_n

$\Downarrow$

29.11.2016

נתון כי סכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.
סכום כל איברי הסדרה הוא 726.
מצא את הפרש הסדרה.

$a_5+a_7=0$

$\Downarrow$

$a_1+4d+a_1+6d=0$

$2a_1+10d=0 \quad /:2$

$a_1+5d=0$

$\Downarrow$

$a_1=-5d$

$S_n=0$ הוכחנו בסעיף קודם

$\Downarrow$

$0=\frac{n}{2}\left[2a_1+d(n-1)\right] \quad /:n\neq 0$

$0=\frac{1}{2}\left[2a_1+d(n-1)\right] \quad /\cdot 2$

$0=2a_1+dn-d$

$a_1=-5d$ נציב

$\Downarrow$

$0=-10d+dn-d \quad /:d\neq 0$

$\Downarrow$

$0=-10+n-1$

$0=n-11$

$\Downarrow$

$n=11$

$\Downarrow$

לכן $3n=33$ בסדרה יש 33 איברים.

$S_{3n}=726$

$\Downarrow$

$726=\frac{3n}{2}\left[2a_1+d(3n-1)\right]$

$1452=3n\left[2a_1+d(3n-1)\right]$

$a_1=-5d$ נציב

$\Downarrow$

$1452=3n\left[-10d+d(3n-1)\right] \quad /:3$

$484=n\left[-10d+3nd-d\right]$

$484=n\left[-11d+3nd\right]$

$\Downarrow$

$484=11\left[-11d+33d\right]$

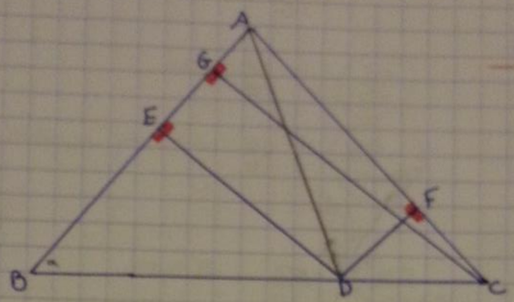
$484=11\cdot 22d \quad /:11$

$44=22d \quad /:22$

$d=2$

מ.ש.ל.

שאלה 3:



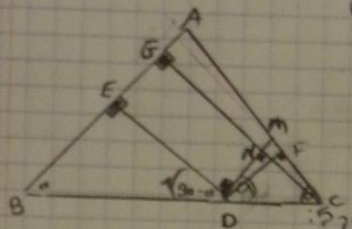
$\triangle ABC$ שווה שוקיים $(AB=AC)$

נתון: $DE \perp AB$

$DF \perp AC$

$CG \perp AB$

צ"ל: $DE+DF=CG$



הוכחה: דרך א':

נחבר את AD כך ניצור שני משולשים:

$S_{\triangle ABD}=\frac{AB \cdot DE}{2}$

$S_{\triangle ADC}=\frac{AC \cdot DF}{2}$

$AC=AB$

$\Downarrow$

$S_{\triangle ADC}=\frac{AB \cdot DF}{2}$

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABD}$ שטח משולש שווה לסכום חלקיו

$\Downarrow$

$S_{\triangle ABC}=\frac{AB \cdot DF}{2}+\frac{AB \cdot DE}{2}$

$\Downarrow$

$\boxed{S_{\triangle ABC}=\frac{AB(DF+DE)}{2}}$

$\boxed{S_{\triangle ABC}=\frac{CG \cdot AB}{2}}$ ושטח גם:

$\Downarrow$

$\frac{CG \cdot \cancel{AB}}{2}=\frac{\cancel{AB}(DF+DE)}{2}$ לפי המעבר

$\Downarrow$

$CG=DF+DE$ מש"ל

דרך ב':

נוריד מ-D ישר DM כך שיחתוך את AC בנקודה M
כך ש: DM מקביל ל-AB.

$\angle D=\alpha$ נתון

$\Downarrow$

$\angle D_1=90-\alpha$

$\angle B=\angle C=\alpha$ זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים

$DM \parallel AB$ על פי הבנייה

$\Downarrow$

$\angle EDM=\angle AED=90^\circ$ סכום זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים 180°

$\Downarrow$

$GEDM=$ מלבן — מרובע בעל 3 זוויות של 90° הוא מלבן

$\Downarrow$

$GN=DE$ במלבן - הצלעות הנגדיות שוות

$\angle MDC=\alpha$

$\angle GND=\angle CND=90^\circ$

$\triangle FCD \cong \triangle NDC$ לפי: ז.ז.צ ונתון

$\Downarrow$

$NC=DF$ צלעות מתאימות במשולשים חופפים

$\Downarrow$

$GN+NC=DE+DF$ סכום קטעים שווים

$GN+NC=GC$ השלם שווה לסכום חלקיו

$\Downarrow$

$GC=DE+DF$ לפי המעבר

מש"ל.

$\frac{BD}{DC}=\frac{ED}{FD}$ יחס המשולשים הדומים

$\Downarrow$

$\frac{BD}{DC+BD}=\frac{ED}{FD+ED}$

BC=סכום

$\Downarrow$

$\frac{BD}{BC}=\frac{ED}{FD+ED}$

דרך ג':

$\angle AED=\angle AGC=90^\circ$

$ED \parallel GC$ זוויות מתאימות שוות ניצבים בין ישרים מקבילים

$\Downarrow$

$\frac{ED}{GC}=\frac{BD}{BC}$ משפט תלס מורחב

אם נחבר זוויות נקבל כי:

$\triangle BED \sim \triangle CFD$ לפי: ז.ז.ז

$\Downarrow$

$\frac{BD}{DC}=\frac{ED}{FD}$ וזה הראיון

29.11.2016

המשך ק3ג:

$$\Downarrow$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{GC}$$ מוכח.

לאחר דמיון המשולשים + פעולה אלגברית פשוטה:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{FD+ED}$$

$$\Downarrow$$

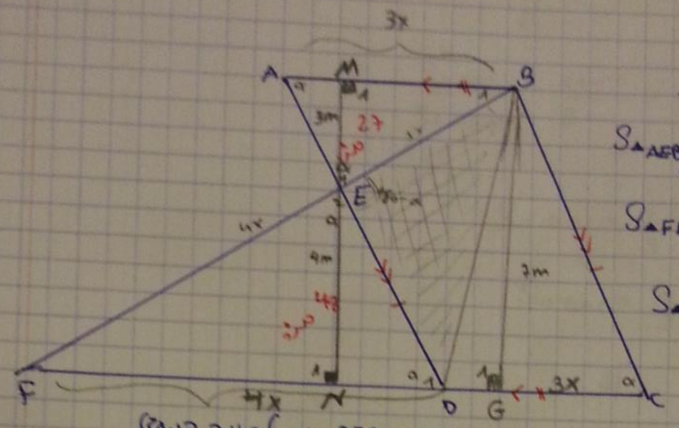
כלל המעבר

$$\frac{ED}{GC} = \frac{ED}{FD+ED}$$

$$\Downarrow$$

$$GC = FD + DE$$

מש"ל.



נתון: ABCD מקבילית

נתון שטח $S_{\triangle AEB}=27$ סמ"ר

$S_{\triangle FED}=48$ סמ"ר

א) חשבו את שטח $S_{\triangle DEB}$

ב) מצא את היחס $\frac{AB}{DF}$, אם נתון שהמרובע DEBC ניתן לחסום במעגל.

א)

ABCD מקבילית - נתון

⇓

$AB \parallel DC$ במקבילית הצלעות הנגדיות מקבילות

⇓

$AB \parallel FD$

⇓

$\sphericalangle F = \sphericalangle B_1$

$\sphericalangle D_1 = \sphericalangle A$

$\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2$

⇓

$\triangle AEB \sim \triangle DEF$ לפי ז.ז.ז.

דרך E נוריד אנך לצלע FD ⇐ $NE \perp FD$ הבנייה עזר

ונמשיך את NE עד שיחתוך את AB בנקודה M

(נוכיח כי המשך NE גובה גם ME ל- AB, כלומר ש- ME מהווה גובה ל- AB ב- $\triangle AEB$): נוכיח $\sphericalangle N_1 = 90°$ מבניית העזר

$AB \parallel FD$

⇓

$\sphericalangle N_1 = \sphericalangle M_1 = 90°$ זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות

⇓

ME גובה ל- AB ב- $\triangle AEB$

יחס הגבהים

$\frac{ME}{NE} = \frac{AB}{DF}$ יחס הגבהים במשולשים דומים שווה ליחס הדמיון

$\frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{AB}{DF}\right)^2$ יחס השטחים של משולשים דומים הוא כיחס הדמיון בריבוע

⇓

$\sqrt{\frac{27}{48}} = \frac{AB}{DF}$

⇓

$\frac{AB}{DF} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

⇓

$\frac{ME}{NE} = \frac{AB}{DF} = \frac{3}{4}$ יחס הגבהים

⇓

$AB = 3x$

$DF = 4x$

$AB = DC = 3x$ במקבילית הצלעות הנגדיות שוות

⇓

$FC = 7x$ השלם שווה לסכום חלקיו.

$\triangle EFD \sim \triangle BFC$ לפי ז.ז.ז.

⇓

$\frac{S_{\triangle EFD}}{S_{\triangle BFC}} = \left(\frac{FD}{FC}\right)^2$ יחס השטחים של משולשים דומים הוא כיחס הדמיון בריבוע

⇓

$\frac{48}{S_{\triangle BFC}} = \left(\frac{4}{7}\right)^2$

$\frac{48}{S_{\triangle BFC}} = \frac{16}{49}$

⇓

$S_{\triangle BFC} = 147$ סמ"ר

מ- B נוריד אנך BG ל- DC - בניית עזר.

$S_{\triangle BDC} = \frac{BG \cdot DC}{2} = \frac{BG \cdot 3x}{2}$

$BG = MN = 7m$ (מרחק בין ישרים מקבילים שווה)

⇓

$S_{\triangle BDC} = \frac{7m \cdot 3x}{2} = \frac{21mx}{2}$

$S_{\triangle AEB} = \frac{AB \cdot ME}{2} = \frac{3x \cdot 3m}{2} = \frac{9xm}{2}$

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AEB}} = \frac{21mx}{9mx} = \frac{7}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{7}{3} S_{\triangle AEB}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{7}{3} \cdot 27 = 63$$ סמ"ר

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle BED} = S_{\triangle BFC} - S_{\triangle BOC}$$ השטח שווה לסכום חלקיו.

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle BED} = 147 - 63 = 84$$ סמ"ר

מש"ל א

ד) DEBC ניתן לחסום במעגל - נתון

$$\Downarrow$$

$\angle BED = 180 - \alpha$, $\underset{\text{סימון}}{\angle C = \alpha}$ סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל - 180°

$$\Downarrow$$

$\angle C = \angle A = \alpha$ מקבילית - הזוויות הנגדיות שוות.

$\angle E_2 = \angle E_1 = \alpha$ סכום זוויות צמודות 180°

$$\Downarrow$$

$AB = BE = 3x$ במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.

$\angle A = \angle D_1 = \alpha$ זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים - שוות

$$\Downarrow$$

$FE = FD = 4x$ במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

מש"ל ד.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$a_4 - a_3 = 4 \cdot (a_2 - a_1)$

$\Downarrow$

$\cancel{a_1} q^3 - \cancel{a_1} q^2 = 4 (a_1 q - a_1) \ /: a_1$

$q^3 - q^2 = 4 (q-1)$

$q^2 \cancel{(q-1)} = 4 \cancel{(q-1)} \ /: (q-1)$

$q^2 = 4$

$\Downarrow$

$q = \pm 2$

$q = 2$

$a_6 = a_1 + 31$

$\Downarrow$

$a_1 q^5 = a_1 + 31$

$a_1 q^5 - a_1 = 31$

$a_1 (q^5 - 1) = 31$

$a_1 (2^5 - 1) = 31$

$a_1 \cdot 31 = 31 \ /: 31$

$a_1 = 1$

$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$	$a_1 a_2, a_2 a_3, \ldots, a_n a_{n+1}, \ldots, a_{n+1} a_{n+2}$	
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\cancel{a_1} q}{\cancel{a_1}} = q = 4$	$a_1 a_2 = a_1 \cdot a_1 q = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$	
$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\cancel{a_1} q^2}{\cancel{a_1} q} = q = 4$	$a_2 a_3 = a_1 q \cdot a_1 q^2 = 8$	
$q = 1$ $\Downarrow$	$q = 4$ $\Downarrow$	(1)
$4, 4, 4, \ldots, 4$		
n	$n+1$	
	2730	(2)

$\Downarrow$

$S_{n+1} = \frac{2 \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1} = \frac{2 (4^{n+1} - 1)}{3}$

$2730 \cdot 3 = 2 (4^{n+1} - 1)$

$4095 = 4^n \cdot 4 - 1 \Leftarrow$

$4096 = 4 \cdot 4^n$

$1024 = 4^n$

$n = 5$

גיאומטריה י

1)

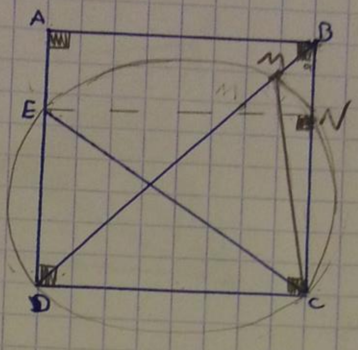
נתון: ABCD ריבוע

$\triangle EDC$ חסום במעגל

צ"ל: א) $CD = EN$

ב) האם הקטע DM קצר מהקטע CE, ארוך ממנו או שווה לו? נמק.

ג) הוכח כי $BM \cdot BD = AE \cdot AD$



א) ABCD ריבוע נתון

$\measuredangle EDC = 90^\circ$ בריבוע כל הזוויות ישרות

$\measuredangle BCD = 90^\circ$

$\Downarrow$

EC קוטר המעגל - זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר המעגל

$\Downarrow$

$\measuredangle ENC = 90^\circ$ זווית היקפית הנשענת על קוטר - בת 90°.

$\Downarrow$

ENCD = מלבן מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן

$\Downarrow$

$DC = EN$ במלבן - הצלעות הנגדיות שוות

מש"ל א'.

ב) $\measuredangle EDC = 90^\circ$ בריבוע כל הזוויות ישרות

$\Downarrow$

EC קוטר המעגל

נחבר את CM.

$\measuredangle NCD = 90^\circ$ בריבוע כל הזוויות ישרות.

$\measuredangle DCM < \measuredangle DCN$ החלק קטן מהשלם.

$\Downarrow$

$\measuredangle DCM < 90^\circ$

$\Downarrow$

DM לא קוטר במעגל, אלא מיתר.

$\Downarrow$

$EC > DM$ הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל.

ג) $BM \cdot BD = AE \cdot AD$ אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים למעגל שני חותכים, אז המכפלה של חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלה של החותך השני בחלקו החיצוני.

מש"ל ג'.

גיאומטריה:

1)

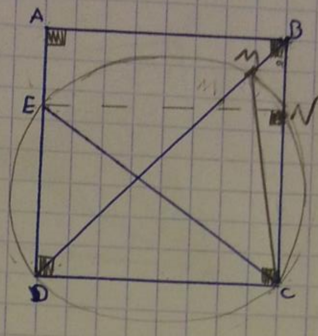
נתון: ABCD ריבוע

$\triangle EDC$ חסום במעגל

צ"ל: א) $CD = EN$

ב) האם הקטע DM קצר מהקטע CE, ארגון מימין אם שונה לו? נמק.

ג) הוכח כי $BM \cdot BD = AE \cdot AD$



א) ABCD ריבוע נתון
$\Downarrow$
$\begin{cases} \angle EDC = 90^\circ \\ \angle BCD = 90^\circ \end{cases}$ בריבוע כל הזוויות ישרות

$\Downarrow$
EC קוטר המעגל - זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר המעגל

$\Downarrow$
$\angle ENC = 90^\circ$ זווית היקפית הנשענת על קוטר - בת 90°.

$\Downarrow$
$ENCD =$ מלבן מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן

$\Downarrow$
$DC = EN$ במלבן - הצלעות הנגדיות שוות

מש"ל א'.

ב) $\angle EDC = 90^\circ$ בריבוע כל הזוויות ישרות

$\Downarrow$
EC קוטר המעגל

נחבר את CM.

$\angle NCD = 90^\circ$ בריבוע כל הזוויות ישרות.

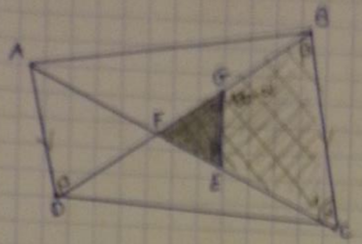
$\begin{cases} \angle DCM < \angle DCN \\ \Downarrow \\ \angle DCM < 90^\circ \end{cases}$ החלק קטן מהשלם.

$\Downarrow$
DM אינו קוטר במעגל
אלא מיתר.

$\Downarrow$
$EC > DM$ הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל.

ג) $BM \cdot BD = AE \cdot AD$ אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים למעגל שני חותכים, אז המכפלה של חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלה של החותך השני בחלקו החיצוני.

מש"ל ג'.



א) [illegible] ABCD [illegible]

BCEG [illegible]

צ.ל: $\triangle FEG \sim \triangle FBC$

הוכחה: $\angle C = \alpha$ נתון

BCEG [illegible] נתון

⇓

$\angle BGE = 180 - \alpha$ [illegible]

⇓

$\angle FGE = \alpha$ [illegible]

⇓

③ $\angle FGE = \angle C = \alpha$ [illegible]

④ $\angle BFC = \angle GFE$ זוויות קודקודיות

⇓

$\triangle FEG \sim \triangle FBC$ לפי ז.ז.

[illegible]

ב) נתון: $\dfrac{AF}{FG} = \dfrac{DF}{FE}$

צ.ל: $\triangle FDA \sim \triangle FEG$

הוכחה: (3.3) $\dfrac{AF}{FG} = \dfrac{DF}{FE}$ נתון

③ $\angle AFD = \angle EFG$ זוויות קודקודיות שוות

⇓

$\triangle FDA \sim \triangle FEG$ לפי: 3.5.3

[illegible]

ג) הוכחה: $AD \parallel BC$

הוכחה: $\triangle FDA \sim \triangle FEG$ [illegible]

⇓

$\angle ADF = \angle FEG = \beta$ [illegible]

$\triangle FEG \sim \triangle FBC$ [illegible]

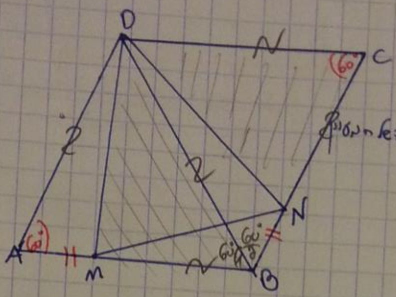
⇓

$\angle FEG = \angle FBC = \beta$ [illegible]

⇓

$\angle FBC = \angle ADF = \beta$ [illegible]

$AD \parallel BC$ [illegible]



נתון: מעוין ABCD

$\angle A=\angle C=60^\circ$ (נתון שהזווית החדה של המעוין היא 60°)

$AM=BN$

א) צ"ל: $\triangle MDB \cong \triangle NDC$

הוכחה: נתון ABCD מעוין

⇓

$AB=CB$ במעוין כל הצלעות שוות.

נתון $AM=BN$

⇓

$AB-AM=BC-BN$ חיסור קטעים שווים.

⇓

$MB=NC$ (3)

נתון $\angle C=60^\circ$

⇓

$\angle ABC=120^\circ$ סכום הזוויות הסמוכות במעוין 180° (סכום זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים - 180°)

⇓

$\angle B_1=\angle B_2=60^\circ$ במעוין, האלכסונים חוצים את זוויות המעוין.

⇓

$\angle B_1=\angle C=60^\circ$ (3) כלל המעבר.

⇓

$\angle CDB=60^\circ$ סכום זוויות במשולש ($\triangle CDB$) - 180°

⇓

$\triangle CDB$ משולש שווה-צלעות

⇓

$DC=DB$ (3)

⇓

$\triangle MDB \cong \triangle NDC$ לפי: צ.ז.צ.

מש"ל

ב) צ"ל: $\triangle ADM \cong \triangle BDN$

הוכחה: $BD=DC$ הוכח בסעיף א' ש-$\triangle BDC$ שווה-צלעות.

$DC=AD$ במעוין, כל הצלעות שוות

⇓

$AD=BD$ (3) כלל המעבר.

נתון $\angle A=60^\circ$

הוכח בסעיף א' $\angle B_2=60^\circ$

⇓

$\angle A=\angle B_2=60^\circ$ (5) כלל המעבר

המשך סעיף ב':

$AM=BN$ (3) נתון

⇓

$\triangle ADM \cong \triangle BDN$ לפי: צ.ז.צ.

מש"ל

ג) שטח מרובע MDNB הוא S

צ"ל: להביע באמצעות S את שטח המעוין ABCD.

פיתרון: שטח המרובע DMBN כולל שטחי שני המשולשים $\triangle DMB$ ו $\triangle DBN$

$S_{\triangle DMB}=S_{\triangle NDC}$ } משולשים חופפים הם שווי שטח

$S_{\triangle DBN}=S_{\triangle DAM}$

⇓

שטח המעוין ABCD $2S$

מש"ל:

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{1 + \cos x \cdot tg^2 x}{1 + \cos x} = \sec x$$

$$\frac{1 + \cos x \cdot tg^2 x}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{1 + \cos x + \cos x \cdot tg^2 x}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{1 + \cos x + \cos x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{1 + \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{\frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x}}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{\frac{\cos x + 1}{\cos x}}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{\cos x + 1}{\cos x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

[illegible]

$1-tg^2\alpha$

$$1+\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-tg^2\alpha}=\sin^2\alpha$$

$$\frac{1-tg^2\alpha+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-tg^2\alpha}=$$

$$\frac{1-tg^2\alpha+\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{1-tg^2\alpha}=$$

$$\frac{1-tg^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-tg^2\alpha}=$$

$$\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\cancel{\cos^2\alpha}}}{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}}}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cancel{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}(1-\cos^2\alpha)}{\cancel{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}}=$$

$$=1-\cos^2\alpha=$$

$$=\sin^2\alpha$$

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}+1=$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=$$

$$=\frac{\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

נכפול בצמוד

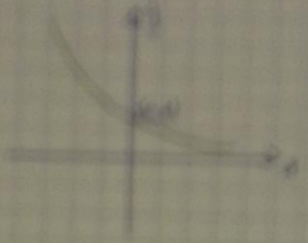
$$=\frac{(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)}=$$

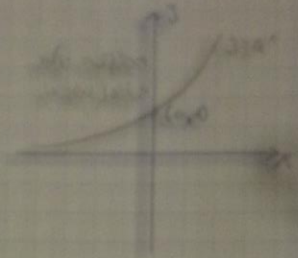
$$=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

מ.ש.ל.





$2^0=1$

$2^1=2$

$2^2=4$

$2^3=8$

$2^4=16$

$2^5=32$

$2^6=64$

$2^7=128$

$2^8=256$

$2^9=512$

$2^{10}=102$[illegible]

$2^{11}=2048$

פתרון:

$$0.6^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{5}{3}\right)^{2x^2-24} = \left(\frac{3}{5}\right)^9$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x^2-24} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-9}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x^2-x-24} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-9}$$

$2x^2-x-24+9=0$

$2x^2-x-15=0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \overset{11}{\sqrt{1+8\cdot 15}}}{4} \to x_1 = -2\frac{1}{2}, \quad x_2 = 3$$

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0.25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$$

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(2^7\right)^{\frac{x+17}{x-3}}$$

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}}$$

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2+\frac{7(x+17)}{x-3}}$$

$$\frac{5x+25}{x-7} = \frac{-2x+6+7x+119}{x-3}$$

$$\frac{5x+25}{x-7} = \frac{5x+125}{x-3}$$

$(5x+25)(x-3) = (x-7)(5x+125)$

$\cancel{5}(x+5)(x-3) = (x-7)\cancel{5}(x+25)$

$\cancel{x^2}+5x-3x-15 = \cancel{x^2}-7x+25x-175$

$2x-15 = 18x-175$

$16x = 160 \quad /:16$

$x = 10$

5) פתרנו בשיעור.
תרגיל מס 6 [illegible]

8) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0.25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}}$

$2^{\frac{5x+25}{x-7}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7x+119}{x-3}}$

$2^{\frac{5x+25}{x-7}} = 2^{\frac{7x+119}{x-3} - 2}$

$\frac{(5x+25)}{x-7} = \frac{(7x+119)}{x-3} - 2 \quad / (x-3)(x-7)$

$(5x+25)(x-3) = (7x+119)(x-7) - 2(x-3)(x-7)$

$\cancel{5x^2} - 15x + 25x - 75 = \cancel{7x^2} + 119x - 49x - 833 - \cancel{2x^2} + 6x + 14x - 42$

$-80x = -800 \quad /:(-80)$

$x = 10$

9) $15^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}$

$(3 \cdot 5)^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}$

$3^{2x-3} \cdot 5^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}$

$\frac{3^{2x-3}}{3^x} = \frac{5^{3x-6}}{5^{2x-3}}$

$3^{2x-3-x} = 5^{3x-6-2x+3}$

$3^{x-3} = 5^{x-3}$

$\frac{3^{x-3}}{5^{x-3}} = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} = 5^0 \rightarrow$

$x-3=0$

$x=3$

10) $\left(\frac{57}{37}\right)^{1+x} + \left(\frac{57}{37}\right)^{1-x} = 10$

$$\left(\frac{57}{37}\right)\cdot\left(\frac{57}{37}\right)^{x} + \frac{\left(\frac{57}{37}\right)}{\left(\frac{57}{37}\right)^{x}} = 10$$

$$\left(\frac{57}{37}\right)\left[\left(\frac{57}{37}\right)^{x} + \frac{1}{\left(\frac{57}{37}\right)^{x}}\right] = 10$$

$$\left(\frac{57}{37}\right)^{x} = t \;;\; t \neq 0$$

$$\left(\frac{57}{37}\right)\left[t + \frac{1}{t}\right] = 10$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10 \cdot 37}{57}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{370}{57} \qquad | \cdot 57t$$

$$57t^2 + 57 = 370t$$

$$57t^2 - 370t + 57 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{370 \pm \sqrt{\overbrace{370^2 - 4 \cdot 57 \cdot 57}^{352}}}{114}$$

$$t_1 = 6\tfrac{1}{3} = \frac{19}{3} \qquad\qquad t_2 = \frac{3}{19}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\frac{57}{37}\right)^{x} = \frac{19}{3} \qquad\qquad \left(\frac{57}{37}\right)^{x} = \frac{3}{19}$$

$$x = \frac{\ln 19/3}{\ln 57/37} \qquad\qquad x = \frac{\ln 3/19}{\ln 57/37}$$

את אי השוויונות הבאים:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-2} \le \left(\frac{1}{625}\right)^{6x-3}$

$5^{2-3x} \le 5^{-4(6x-3)}$

$2-3x \le -24x+12$

$21x \le 10$

$x \le \frac{10}{21}$

2) $\frac{81}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x+4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2-4x}$

$\left(\frac{9}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-x-4} < \left(\frac{3}{2}\right)^{4x-2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x-8} < \left(\frac{3}{2}\right)^{4x-2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2x-4} < \left(\frac{3}{2}\right)^{4x-2}$

$-2x-4 < 4x-2$

$-2 < 6x \quad /:6$

$-\frac{1}{3} < x$

3) $(\sqrt{2})^{3x-2} < 4\cdot 8^{x}$

$2^{1.5x-1} < 2^{2}\cdot 2^{3x}$

$2^{1.5x-1} < 2^{3x+2}$

$1.5x-1 < 3x+2$

$-3 < 1.5x \quad /:1.5$

$-2 < x$

4) $4^{x+\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-2} < \frac{3}{4}$

$4^{x+\frac{3}{2}} + 2^{2x+2} < \frac{3}{4}$

$2^{2x+3} + 2^{2x+2} < \frac{3}{4}$

$2^{2x}\cdot 2^{3} + 2^{2x}\cdot 2^{2} < \frac{3}{4}$

$2^{2x}\cdot 8 + 2^{2x}\cdot 4 < \frac{3}{4}$

$12\cdot 2^{2x} < \frac{3}{4} \quad /:12$

$2^{2x} < \frac{3}{12\cdot 4}$

$2^{2x} < \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4\cdot 4}$

$2^{2x} < \frac{1}{16}$

$2^{2x} < \frac{1}{2^{4}}$

$2^{2x} < 2^{-4} \rightarrow 2x < -4 \quad /:2$

$x < -2$

5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{6-x}{3-x}} \geq 49$

$7^{\frac{x-6}{3-x}} > 7^{2}$

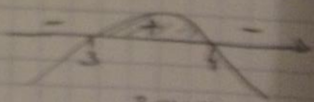
$\frac{x-6}{3-x} > 2$

$\frac{x-6}{3-x} - 2 > 0$

$\frac{x-6-6+2x}{3-x} > 0$

$\frac{3x-12}{3-x} > 0$

$x \neq 3$



$3 < x < 4$