16.09.18

פתרון 88-195 בדידה – קורס קיץ תשע"ח – מועד ב'

מרצים: אחיה בר-און, דר' אפי כהן, אלעד עטייא, דר' ארז שיינר

מתרגלים: עדי בן-צבי, תמר בר-און, אריאל ויצמן, דר' מיכאל טויטו, עובד נגר, אלעד עטייא

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 105 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.

1. (20 נק') תהיינה קבוצות A,B,C , הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $P(A)\subseteq P(B)$ אם"ם $A\subseteq B$.

<u>הוכחה:</u>

בכיוון ראשון, נניח כי $A\subseteq B$ ונוכיח כי $P(A)\subseteq P(B)$.

תהי $X\in P(A)$ לכן $X\subseteq A$.

כיוון ש $A\subseteq B$, נובע כי $X\subseteq B$ ולכן $X\in P(B)$.

בכיוון שני, נניח כי $P(A)\subseteq P(B)$ ונוכיח כי $A\subseteq B$.

יהי $x\in A$ לכן $\{x\}\in P(A)$.

כיוון ש $P(A)\subseteq P(B)$, נובע כי $\{x\}\in P(B)$, לכן $\{x\}\subseteq B$, ולכן $x\in B$.

ב. אם $A\setminus B=B\setminus C$ אזי $A\setminus B\subseteq B\cap(C\setminus A)$.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח כי $A\setminus B=\varnothing$, ולכן ההכלה מיידית.

נניח בשלילה כי $A\setminus B\neq\varnothing$ לכן קיים $x\in A\setminus B$ ולפי ההגדרה מתקיים $x\notin B$.

מצד שני, לפי הנתון $A\setminus B=B\setminus C$ נובע כי $x\in B\setminus C$ ולכן לפי ההגדרה מתקיים $x\in B$,

סתירה.

ג. אם $A\in B$ ו $B\subseteq C$ אזי $C\setminus A\neq C$.

<u>הפרכה:</u>

$A=\varnothing, B=C=\{\varnothing\}$.

אכן $A\in B$ ו $B\subseteq C$ אבל $C\setminus A=C\setminus\varnothing=C$.

ד. $A\subseteq B\cap C$ אם ורק אם $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap B\cap C$

<u>הפרכה:</u>

$A=\{1\}, B=C=\varnothing$

מצד אחד $A\not\subset B\cap C$ אך $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap B\cap C$.

2. (25 נק') תהי $A=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ קבוצת הפונקציות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$. עבור כל אחד מהיחסים הבאים על A קבעו אם הוא יחס שקילות או לא. הוכיחו קביעתכם.

אם מדובר ביחס שקילות, מצאו את עוצמת מחלקת השקילות של $f(x)=2x$.

א. $(f,g)\in R$ אם"ם $f\circ g=g\circ f$.

<u>לא יחס שקילות</u>:

היחס אינו טרנזיטיבי.

נביט בפונקציות $f=x^2, g=x, h=x+1$ (בעצם $g=Id$ היא הזהות).

$f\circ g=g\circ f=f, h\circ g=g\circ h=h$, אך $f\circ h=(x+1)^2\neq x^2+1=h\circ f$.

ב. $(f,g)\in S$ אם"ם $\forall y\in\mathbb{R}\exists x\in\mathbb{R}:(x>y)\wedge(f(x)=g(x))$.

<u>לא יחס שקילות</u>:

היחס אינו טרנזיטיבי.

במילים פשוטות היחס מתקיים אם לכל נקודה יש נקודה אחריה בה הפונקציות שוות.

נביט בפונקציות $f(x)=1, g(x)=\sin(x), h(x)=0$.

f מקיימת את היחס עם g, וגם g מקיימת את היחס עם h, אך ברור שהיחס אינו מתקיים בין f,h.

ג. $(f,g)\in T$ אם"ם $\exists y\in\mathbb{R}\forall x\in\mathbb{R}:(x>y)\to\left(f(x)=g(x)\right)$.

<u>כן יחס שקילות</u>:

<u>רפלקסיבי</u>:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ צ"ל כי $(f,f)\in T$.

נבחר $y=0$ (למשל). אכן לכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)=f(x)$.

<u>סימטרי</u>:

תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $(f,g)\in T$ צ"ל כי $(g,f)\in T$.

קיים y כך שלכל $x>y$ מתקיים כי $f(x)=g(x)$, ולכן ברור גם כי $g(x)=f(x)$.

אכן הוכחנו כי $\exists y\in\mathbb{R}\forall x\in\mathbb{R}:(x>y)\to\left(g(x)=f(x)\right)$.

<u>טרנזיטיבי</u>:

תהיינה $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $(f,g),(g,h)\in T$ צ"ל כי $(f,h)\in T$.

קיים y_1 כך שלכל $x>y_1$ מתקיים כי $f(x)=g(x)$.

קיים y_2 כך שלכל $x>y_2$ מתקיים כי $g(x)=h(x)$.

לכן, עבור $y_3=\max\{y_1,y_2\}$ לכל $x>y_3$ מתקיים כי $x>y_1$ וגם $x>y_2$ ולכן $f(x)=h(x)$.

<u>עוצמת מחלקת השקילות</u>:

ראשית, עוצמת כל A היא $2^{\aleph}=2^{\aleph_0\cdot\aleph}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph}=\aleph^{\aleph}$.

לכן ברור כי $\left|[2x]_T\right|\le 2^{\aleph}$

מצד שני, נביט בקבוצה $B=\left\{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid\forall x>0:h(x)=2x\right\}$.

ברור כי $B\subseteq[2x]_T$ ולכן $|B|\le\left|[2x]_T\right|$.

קל לראות כי $B\sim\mathbb{R}^{(-\infty,0]}$ ולכן $|B|=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$.

ביחד לפי ק.ש.ב נובע כי $\left|[2x]_T\right|=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$.

.3

א. (12 נק') תהי קבוצה A הוכיחו כי $|P(A)|>|A|$.

(כלומר $|P(A)|\geq|A|$ וגם $|P(A)|\neq|A|$.)

משפט קנטור מההרצאה.

ב. (8 נק') תהיינה שתי קבוצות A,B.

הוכיחו/הפריכו: $|A\setminus B|\leq|P(A)\setminus P(B)|$

<u>הוכחה I</u>:

נגדיר פונקציה $f:A\setminus B\to P(A)\setminus P(B)$ ע"י לכל $x\in A\setminus B$ נגדיר $f(x)=\{x\}$.

כיוון ש $x\in A, x\notin B$ ברור כי $\{x\}\in P(A), \{x\}\in P(B)$ ולכן $\{x\}\in P(A)\setminus P(B)$.

הראנו שהפונקציה מוגדרת היטב, כעת נראה שהיא חח"ע – אם $\{x\}=\{y\}$ ברור ש $x=y$.

<u>הוכחה II</u>:

ראשית נוכיח כי $P(A\setminus B)\subseteq\left(P(A)\setminus P(B)\right)\cup\{\varnothing\}$.

תהי $X\subseteq A\setminus B$ לכן ברור כי $X\subseteq A$ ולכן $X\in P(A)$.

אם $X\neq\varnothing$ אזי קיים $a\in X$ וברור ש $a\notin B$ ולכן $X\not\subset B$ ולכן $X\notin P(B)$ ולכן $X\in P(A)\setminus P(B)$.

לכן $|P(A\setminus B)|\leq|P(A)\setminus P(B)|+1$

כעת, לפי משפט קנטור לעיל, ידוע כי $|A\setminus B|<|P(A\setminus B)|$

ולכן $|A\setminus B|<|P(A)\setminus P(B)|+1$,

ולכן $|A\setminus B|\leq|P(A)\setminus P(B)|$.

4. (18 נק') קבעו והוכיחו לכל קבוצה אם היא מעוצמת $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או סופית.

אם היא סופית רשמו את מספר האיברים בקבוצה.

א. $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$

לכל $x\in(-1,1)$ קיימות בדיוק שתי נקודות על מעגל היחידה, ובנוסף יש את שתי הנקודות $(-1,0),(1,0)$.

סה"כ $|A|=2\cdot|(-1,1)|+2=2\cdot\aleph+2=\aleph$.

ב. $B=\left\{(x,y)\in A \mid x-y=1\right\}\subseteq A$

נוכיח כי $B=\left\{(1,0),(0,-1)\right\}$ ולכן $|B|=2$.

עבור נקודות על מעגל היחידה ברביע הרביעי $x-y$ הוא סכום הניצבים במשולש ישר זוית,

והוא קטן ממש מהיתר ששווה ל1 (רדיוס מעגל היחידה).

בכל רביע אחר, $x-y$ קטן יותר מסכום הניצבים במשולש, ולכן על אחת כמה וכמה קטן ממש מ1.

נותרו רק 4 נקודות הקצה שלא יוצרות משולש ישר זוית $\left\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\right\}$

ומבדיקה פשוטה נובע כי $B=\left\{(1,0),(0,-1)\right\}$.

ג. $C=\left\{X\subseteq A : |X|=2\right\}\subseteq P(A)$

בעצם מדובר על אוסף הזוגות של נקודות במעגל היחידה.

ברור כי $|A|\le|C|$ (נשלח כל נקודה לזוג כלשהו שמכיל את הנקודה).

וברור כי $|C|\le|A\times A|$ (נהפוך כל זוג נקודות לזוג סדור בסדר אחד מבין השניים).

כעת $|A\times A|=\aleph\cdot\aleph$ ולפי ק.ש.ב נובע כי $|C|=\aleph$.

5. יהי גרף $G=(V,E)$. נגדיר יחס R על קבוצת הקודקודים V על ידי

$$vRu \Leftrightarrow (v=u) \vee (\deg(v)<\deg(u))$$

כאשר $\deg(v)$ היא דרגת הקודקוד v.

א. (4 נק') הוכיחו כי R הינו יחס סדר חלקי.

<u>רפלקסיביות:</u>

יהי $v\in V$, ברור כי $v=v$ ולכן vRv.

<u>אנטי-סימטריות:</u>

יהיו $v,u\in V$ כך ש vRu וגם uRv צ"ל $v=u$.

נניח בשלילה כי $v\neq u$, לכן $\deg(v)>\deg(u)$ וגם $\deg(v)<\deg(u)$ סתירה.

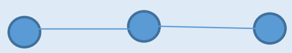
<u>טרנזיטיביות:</u>

יהיו $v,u,w\in V$ כך ש vRu,uRw צ"ל vRw.

אם שניים מבין הקודקודים שווים, זה נובע באופן ברור.

אחרת, $\deg(v)<\deg(u)<\deg(w)$ ולכן vRw.

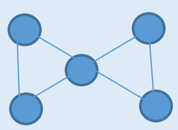
ב. (4 נק') תנו דוגמה לגרף G שיש בו קודקוד גדול ביותר לפי היחס R אך אין לו קודקוד קטן ביותר, או הוכיחו שאין גרף כזה.



הקודקוד האמצעי מדרגה 2 ושני האחרים מדרגה 1.

לכן הקודקוד האמצעי הוא הגדול ביותר, ושני האחרים מינימליים ולכן אין קטן ביותר.

ג. (4 נק') תנו דוגמה לגרף G שדרגות כל קודקודיו זוגיות ויש בו קודקוד גדול ביותר לפי היחס R, או הוכיחו שאין גרף כזה.



הקודקוד המרכזי מדרגה 4 ושאר הקודקודים מדרגה 2.

דרגות כל הקודקודים זוגיות, והקודקוד המרכזי הוא הגדול ביותר.

ד. (10 נק') נניח כי $|V|\geq 2$. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי R אינו מלא.

יהי גרף עם $|V|=n$ קודקודים. ניתן להשוות בין קודקודים שונים אם"ם הדרגות שלהם שונות.

לכן הדרך היחידה שהיחס יהיה מלא היא שדרגות קודקודיו הינן $0,1,2,\ldots,n-1$.

באינדוקציה –

עבור $n=2$ - או ששתי דרגות הקודקודים הן 1 או 0, כך או כך היחס לא מתקיים ביניהם.

יהי n עבורו הטענה נכונה, ונוכיח כי עבור גרף עם n+1 קודקודים היחס אינו מלא. נניח בשלילה כי היחס מלא, נוריד את הקודקוד מדרגה 0, וקיבלנו גרף עם n קודקודים שהיחס עליו מלא – בסתירה להנחת האינדוקציה.

בלי אינדוקציה – אם יש קודקוד מדרגה $n-1$ הוא מחובר לכל הקודקודים האחרים, ולכן לא ייתכן שקיים קודקוד מדרגה 0.