חוברת תרגילים ופתרונות

קורס מס' 88235 - אנליזת פורייה

סמסטר קיץ, תשע"ו
ד"ר מיכאל מיכאלי

המחלקה למתימטיקה, אוניברסיטת בר אילן

<u>שאלה 1</u>

א. יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכח שלכל $u,v\in V$ מתקיים "חוק המקבילית"

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2$$

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית <u>ממשי</u>. הוכח שלכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2$$

<u>פתרון:</u>

א.

ראשית נפצל את המרכיבים שבאגף שמאל:

$$I.\ \|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle \underset{\text{תכונה}3}{=} \langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle \underset{\text{תכונה}4}{=} \overline{\langle u+v,u\rangle}+\overline{\langle u+v,v\rangle}=$$

$$\underset{\text{תכונה}3}{=} \overline{\langle u,u\rangle}+\overline{\langle v,u\rangle}+\overline{\langle u,v\rangle}+\overline{\langle v,v\rangle}=\|u\|^2+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\|v\|^2$$

$$II.\ \|u-v\|^2=\langle u-v,u-v\rangle \underset{\text{תכונה}3}{=} \langle u,u-v\rangle-\langle v,u-v\rangle \underset{\text{תכונה}4}{=} \overline{\langle u-v,u\rangle}-\overline{\langle u-v,v\rangle}=$$

$$\underset{\text{תכונה}3}{=} \overline{\langle u,u\rangle}-\overline{\langle v,u\rangle}-\overline{\langle u,v\rangle}+\overline{\langle v,v\rangle}=\|u\|^2-\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle+\|v\|^2$$

כעת נחבר את I ו- II:

$$\boxed{\Rightarrow I+II=\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2}$$

ב.

בסעיף א' מצאנו כי:

$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\|v\|^2$$

$$\|u-v\|^2=\|u\|^2-\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle+\|v\|^2$$

נחסיר את הביטוי השני מהביטוי הראשון:

$$\|u+v\|^2-\|u-v\|^2=2\langle u,v\rangle+2\langle v,u\rangle \underset{\text{בממשיים}\ \langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle}{=} 4\langle u,v\rangle$$

$$\boxed{\Rightarrow\ \frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2=\langle u,v\rangle}$$

שאלה 2

א. לכל זוג פונקציות $f,g\in C[a,b]$ נגדיר את הפעולה הבאה:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

האם פעולה זו מהווה מכפלה פנימית במרחב $C[a,b]$?

ב. $C^1[a,b]$ הוא מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[a,b]$. לכל $f,g\in C^1[a,b]$ נגדיר פעולה הבאה:

$$(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx$$

האם פעולה זו מהווה מכפלה פנימית?

ג. לכל $f,g\in C^2[-\pi,\pi]$ נגדיר פעולה הבאה: $\langle f,g\rangle=f(-\pi)g(-\pi)+\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g''(x)dx$

האם פעולה זו מהווה מכפלה פנימית במרחב $C^2[-\pi,\pi]$?

פתרון:

א. התשובה חיובית. יש לבדוק את סעיפי ההגדרה.

ב. נתבונן למשל ב $f\equiv 1$:

$f\in C^1[a,b]$

$f\neq 0$

ובכל זאת $(f,f)=\int_a^b f'(x)f'(x)dx=\int_a^b 0dx=0$

לכן זו <u>איננה</u> מכפלה פנימית.

ג. התשובה שלילית.

נראה כי תנאי מס' 2 בהגדרה אינו מתקיים (לכל $f\in C^2[-\pi,\pi]$, $\langle f,f\rangle=0$ אם ורק אם $f=0$).

$$\langle f,f\rangle=\left(f(-\pi)\right)^2+\int_{-\pi}^{\pi}\left(f''(x)\right)^2dx$$

$$\langle f,f\rangle=0\Rightarrow\begin{cases}1.\ f(-\pi)=0\\ 2.\ \ f''(x)=0\end{cases}$$

נתבונן בדרישה מס' 2:

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ f'(x)=C\ \Rightarrow\ f(x)=Cx+B$$

פונקציה ליניארית השווה לאפס בנקודה אחת לא בהכרח מתאפסת זהותית, לכן הפעולה <u>לא</u> מהווה מכפלה פנימית.

<u>שאלה 3</u>

יהי $R[-1,1]$ מרחב הפונקציות הרציפות $f:[-1,1]\to R$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

א. יהיו $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ ו- $P_2(x)=1-3x^2$. הוכח כי קבוצה זו של פולינומים היא אורתוגונאלית ב- $R[-1,1]$.

ב. מצא קבועים a , b ו- c כך שהפונקציה $P_3(x)=a+bx+cx^2+x^3$ תהיה ניצבת לכל אחת מן הפונקציות מסעיף א'.

<u>פתרון:</u>

א. נבדוק את המכפלה הפנימית במקרים הבאים:

$$\langle P_0,P_1\rangle=\int_{-1}^{1}xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\langle P_0,P_2\rangle=\int_{-1}^{1}(1-3x^2)dx=\left[x-\frac{3x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=(1-1)-(-1+1)=0$$

$$\langle P_1,P_2\rangle=\int_{-1}^{1}(x-3x^3)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=0$$

ב. במקרה זה מכפלה פנימית של P_3 עם כל אחד מהפולינומים מסעיף א' צריכה להיות שווה לאפס, כלומר:

$$\langle P_0,P_3\rangle=\int_{-1}^{1}(a+bx+cx^2+x^3)dx=0\quad\Rightarrow 2a+\frac{2c}{3}=0$$

$$\langle P_1,P_3\rangle=\int_{-1}^{1}(ax+bx^2+cx^3+x^4)dx=0\quad\Rightarrow b=-\frac{3}{5}$$

$$\langle P_2,P_3\rangle=\int_{-1}^{1}(1-3x^2)(a+bx+cx^2+x^3)dx=0\quad\Rightarrow c=0$$

לסיכום נקבל כי $P_3(x)=-\frac{3}{5}x+x^3$.

שאלה 4

נתון מרחב מ"פ $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx$, ו-W הוא תת-מרחב של $C[-1,1]$, הנפרש על ידי $\{1,\cos\pi x,\sin\pi x\}$. מצא/י את קרוב הטוב ביותר ל- $f(x)=\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$ ב-W.

פתרון

ניתן לבדוק כי מערכת $\{1,\cos\pi x,\sin\pi x\}$ הינה אורתוגונאלית אך אינה אורתונורמלית במרחב $C[-1,1]$ ביחס למכפלה פנימית הנתונה, ולכן, על מנת למצוא את הקירוב הטוב ביותר ל- $f(x)=\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$ ב-W (והוא ההיטל האורתוגונאלי $\tilde{f}(x)$ של $f(x)$), נמצא מקדמים $a,\ b,\ c$ כך ש-

$$\tilde{f}(x)=a\cdot 1+b\cdot\cos(\pi x)+c\cdot\sin(\pi x)$$

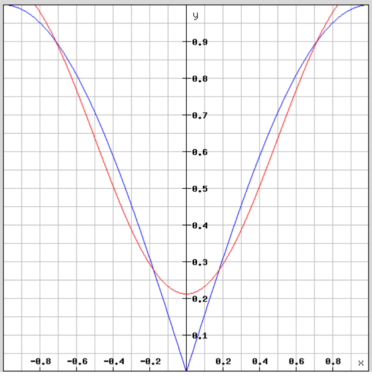
$$a=\frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{\int_{-1}^{1}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|dx}{\int_{-1}^{1}dx}=\frac{2\int_{0}^{1}\sin\frac{\pi x}{2}dx}{2}=\frac{2}{\pi}$$

$$b=\frac{\langle f,\cos(\pi x)\rangle}{\langle\cos(\pi x),\cos(\pi x)\rangle}=\frac{\int_{-1}^{1}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\cos(\pi x)dx}{\int_{-1}^{1}\cos^2(\pi x)dx}=-\frac{4}{3\pi}$$

$$c=\frac{\langle f,\sin(\pi x)\rangle}{\langle\sin(\pi x),\sin(\pi x)\rangle}=0$$

לסיכום, נקבל כי

$$\tilde{f}(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{3\pi}\cos(\pi x)$$



<u>שאלה 5</u>

יהי P_2 מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל-2. לכל $f,g\in P_2$ נגדיר

$$\langle f,g\rangle=\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx .$$

א. הוכח כי זוהי מכפלה פנימית על P_2.

ב. הראה שהקבוצה $\left\{1,\ 1-x,\ 1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו.

<u>פתרון:</u>

א. יש לבדוק את סעיפי ההגדרה.

ב. יש לבדוק כי:

$$1.\ \left\langle 1,\ 1-x\right\rangle=\left\langle 1,\ 1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\rangle=\left\langle 1-x,\ 1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\rangle=0$$

$$2.\ \left\langle 1,\ 1\right\rangle=\left\langle 1-x,\ 1-x\right\rangle=\left\langle 1-2x+\frac{1}{2}x^2,\ 1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\rangle=1$$

<u>שאלה 6</u>

א. מצא/י את טור פורייה של $f(x)=|\cos x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. מצא/י את ערכי המקדמים הבאים: a_0, a_4, a_9, b_5, b_{10}.

<u>פתרון:</u>

א. פונקציה $f(x)=|\cos x|$ היא זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ ולכן $b_n=0$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{4}{\pi}[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

$$n\ge 1\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|\cos nx dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(n+1)x+\cos(n-1)x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}\right]=\begin{cases}\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} & n=2k\\ 0 & n=2k-1\end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow |\cos x| \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kx}$$

ב.

$$b_5 = b_{10} = 0 \ , a_9 = 0 \ , a_4 = \frac{-4}{15\pi} \ , a_0 = \frac{4}{\pi}$$

שאלה 7

מצא/י את טורי פורייה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = |x|$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

פתרון:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

ב. $f(x) = x^2$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

פתרון:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

שאלה 8

א. מצא/י את טור פורייה של $g(x) = e^{ix}$ בקטע $[-1,1]$.

ב. מהו ערכו של המקדם c_{-1}?

פתרון:

א. נחשב תחילה את מקדמי טור פורייה המרוכב:

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{ix} e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(1-n\pi)x}}{i(1-n\pi)} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{1-n\pi} \frac{e^{i(1-n\pi)} - e^{-i(1-n\pi)}}{2i} = \frac{\sin(1-n\pi)}{1-n\pi}$$

$$\Rightarrow e^{ix} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(1-n\pi)}{1-n\pi} e^{in\pi x}$$

ב.

$$c_{-1} = \frac{\sin(1+\pi)}{1+\pi}$$

שאלה 9

ג. מצא/י את טור פורייה של $f(x)=|\cos x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ד. מצא/י את ערכם של המקדמים הבאים: a_0, a_4, a_9, b_5, b_{10}.

ה. חשב/י את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

פתרון:

א+ב. ראה שאלה 6.

ג. נשתמש במשפט דיריכלה עבור הפונקציה $f(x)=|\cos x|$ בנקודה $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right)+f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2}=0=\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(k\pi)\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k=-\frac{2}{\pi}$$

שאלה 10

א. מצא/י את טור פורייה של $f(x)=|\sin x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. חשב/י את סכום הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$. (נמק את תשובתך).

פתרון:

א. הפונקציה $f(x)=|\sin x|$ זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ ולכן $b_n=0$ לכל $n\ge 1$.

נחשב את a_0 :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}\cdot[-\cos x]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}(1+1)=\frac{4}{\pi}$$

כעת נחשב את a_1 בנפרד:

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2xdx=\frac{1}{2\pi}[-\cos 2x]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(-1+1)=0$$

וכעת נחשב את a_n נחשב לכל $n\neq 1$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(1+n)x+\sin(1-n)x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{1+n}-\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n+1}{1+n}+\frac{(-1)^n+1}{1-n}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}=$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\pi(1-4k^2)} & n=2k\\ 0 & n=2k-1\end{cases}$$

$$\boxed{\left|\sin x\right| \sim \frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}\cos 2nx}$$

ב. לפי משפט פרסבל עבור $f(x)$ נקבל כי:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin x\right|^2 dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-4n^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2x\right)dx=1$$

$$\Rightarrow 1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}}$$

<u>שאלה 11</u>

נתונה פונקציה הבאה: $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2|x|}{\pi} & 0\le |x|\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \dfrac{\pi}{2}\le |x|\le \pi\end{cases}$,

כאשר $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx+b_k\sin kx\right]$ הינו הטור פורייה שלה בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. מצא טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. מצא/י את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$.

<u>פתרון:</u>

א. $f(x)$ זוגית ולכן:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2|x|}{\pi}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left[x-\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2|x|}{\pi}\right)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx = \frac{2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\left[x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\cdot\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\left(1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\pi^2 n^2}$$

לסיכום נקבל כי:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\pi^2 n^2}\cos(nx)$$

ב. טור פורייה של f שמצאנו הינו:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\pi^2 n^2}\cos(nx),$$

נרשום במפורש את המקדמים במחזוריות 4:

$$a_n = \frac{4\left(1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\pi^2 n^2} = \left\{\begin{array}{lll} 0 & ;n=4k & \\ \frac{4}{\pi^2(4k-1)^2} & ;n=4k-1 & \\ \frac{8}{\pi^2(4k-2)^2} & ;n=4k-2 & k=1,2,3... \\ \frac{4}{\pi^2(4k-3)^2} & ;n=4k-3 & \end{array}\right\}$$

ובסה"כ נקבל את הטור פורייה במפורש:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(4k-1)^2}\cos((4k-1)x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(4k-2)^2}\cos((4k-2)x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(4k-3)^2}\cos((4k-3)x)$$

או בצורה :

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos((2k-1)x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$$

כעת נשתמש במשפט דיריכלה עבור f והנקודה $x=0$ ונקבל:

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

שאלה 12:

א. חשב טור פורייה של $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,2\pi]$ ו- $[0,\pi]$.

ב. חשב טור סינוסים וטור קוסינוסים של $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,\pi]$.

ג. נגדיר פונקציה $G(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, כאשר הטור הינו טור קוסינוסים שחושב בסעיף הקודם. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G^2(t)dt \qquad \int_{\pi}^{9\pi} G^2(t)dt \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G^2(t)dt$$

פתרון:

א. טור פורייה של $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,\pi]$ הינו מהצורה הבא: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos 2nx + b_n \sin 2nx]$

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi} & n=0 \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos 2nx dx = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} & n \ge 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sin x \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx, \quad x\in[0,\pi]}$$

טור פורייה של $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,2\pi]$ הינו $\sin x$ בעצמו.

ב. טור סינוסים של $\sin x$ זהה להרחבה האי-זוגית של $\sin x$ מקטע $[0,\pi]$ לקטע $[-\pi,\pi]$ שהינה בדיוק $\sin x$.
טור קוסינוסים של $\sin x$ זהה להרחבה הזוגית של $\sin x$ מקטע $[0,\pi]$ לקטע $[-\pi,\pi]$ שהינה $|\sin x|$ והוא זהה לטור שחושב בסעיף א':

$$\boxed{\sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx, \quad x\in[0,\pi]}$$

ג. לפי סעיף קודם $\forall x\in R \;\; G(x)=|\sin x|$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} G^2(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}|\sin t|^2 dt=2\int_0^{\pi}\sin^2 t dt=\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt=\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{9\pi} G^2(t)dt=\int_{\pi}^{9\pi}|\sin t|^2 dt=\int_{\pi}^{3\pi}|\sin t|^2 dt+\int_{3\pi}^{5\pi}|\sin t|^2 dt+\int_{5\pi}^{7\pi}|\sin t|^2 dt+\int_{7\pi}^{9\pi}|\sin t|^2 dt=4\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G^2(t)dt=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|^2 dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\frac{\pi}{2}$$

__שאלה 13:__

נתונה פונקציה $g(x)=\dfrac{2}{2-\cos x+i\sin x}$ בקטע $[-\pi,\pi]$. חשב את $\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2dx$.

רמז: הצג את $g(x)$ כטור מתכנס במידה שווה והשתמש בשוויון פרסבל.

__פתרון:__

ניתן להציג את $g(x)$ באופן הבא:

$$g(x)=\frac{2}{2-(\cos x-i\sin x)}=\frac{2}{2-e^{-ix}}=\frac{1}{2-\frac{e^{-ix}}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}e^{-inx}$$

טור זה מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-\pi,\pi]$.

נשתמש בשוויון פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2dx=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=2\pi\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8\pi}{3}$$

שאלה 14

פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ו-$F(x)$ הינה הפונקציה הקדומה שלה.
ידוע כי $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$ ו- $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx=1$. הבע את האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi} x^2F(x)dx$ באמצעות המקדמים a_n,b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

פתרון:

נשים לב, כי מהתנאי הראשון נובעת התוצאה הבאה: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$.

ולכן,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

לפי משפט האינטגרציה,

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right]+C$$

כאשר $C=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx}_{=1}=\frac{1}{2\pi}$.

כלומר

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right]$$

כעת נשתמש בטור פורייה של $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$ ובמשפט פרסבל מוכלל ונקבל כי

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2F(x)dx=\frac{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^2}{3}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\frac{-b_n}{n}=\frac{\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}b_n}{n^3}$$

ולסיכום נקבל את התוצאה הדרושה:

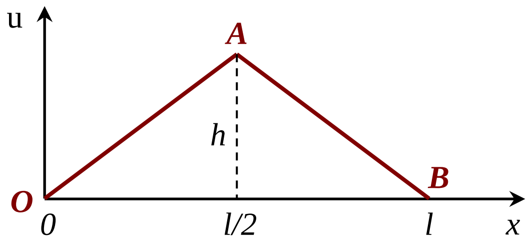
$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2F(x)dx=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi(-1)^{n+1}b_n}{n^3}$$

<u>שאלה 15</u>

מצא/י פתרון של משוואת גלים הבאה באמצעות הפרדת משתנים:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

המשוואה מתארת את תנודת המיתר, כאשר המיתר מקובע בקצוות $x=0$ ו- $x=l$ וצורתו ההתחלתית של המיתר מתוארת על ידי העקומה OAB (באיור). הנח/י כי אין מהירות התחלתית למיתר:



<u>פתרון:</u>

ראשית נמצא את משוואת העקומה OAB:

משוואת הישר OA היא $\frac{2h}{l}x$ ואילו משוואת הישר AB היא $\frac{2h}{l}(l-x)$, כלומר נקבל כי

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{2h}{l}x & ;\ 0\le x\le\frac{l}{2}\\ \frac{2h}{l}(l-x) & ;\ \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

בנוסף לכך, נתון כי $\psi(x)=0$.

במקרה שלנו, הפתרון הכללי של המשוואה נתון באופן הבא:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad \text{ו-} \quad b_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

במקרה שלנו

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{4h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\frac{4h}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

נבצע אינטגרציה בחלקים ונקבל כי

$$a_n=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

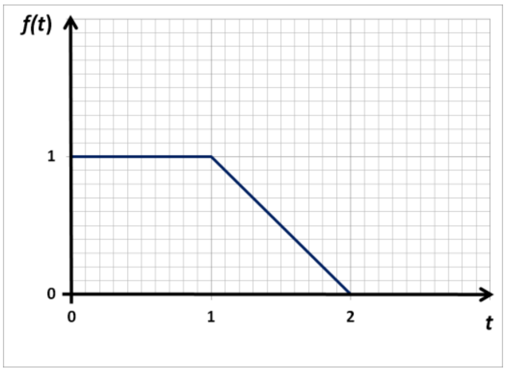
בנוסף לכך נקבל כי $b_n=0$.

ולסיכום נקבל את הפתרון הסופי:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

שאלה 16

א. מצא טור סינוסים וטור קוסינוסים של $f(t)$ המוגדרת באופן הבא:



ב. לאיזה ערך מתכנס טור סינוסים מסעיף א' בנקודה $t=0$? נמק את תשובתך.

פתרון:

כפי שניתן לראות, הפונקציה $f(t)$ מוגדרת באופן הבא:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ 2-t, & 1\le t\le 2\end{cases}$$

א.

אם נמשיך את הפונקציה באופן אי-זוגי לקטע $[-2,0]$ נקבל כי:

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^1 1\cdot\sin\frac{n\pi}{2}tdt+\int_1^2(2-t)\sin\frac{n\pi}{2}tdt=$$

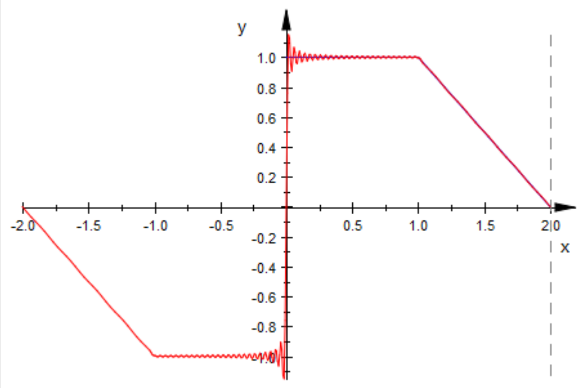
$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}t\Big|_0^1-2\frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}t\Big|_1^2+\frac{2t}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}t\Big|_1^2-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}t\Big|_1^2=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2}-1\right]-\frac{4}{n\pi}\left[\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{2}{n\pi}\left[2\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right]=$$

$$=\frac{2}{n\pi}+\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

טור סינוסים:

$$\Rightarrow f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}t}{n}-\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}t}{(2n-1)^2}$$



באותו אופן נקבל טור קוסינוסים:

$$a_0=\int_0^1 dt+\int_1^2(2-t)dt=t\Big|_0^1+\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^2=1+4-\frac{4}{2}-2+\frac{1}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_n=\int_0^1\cos\frac{n\pi}{2}tdt+\int_1^2(2-t)\cos\frac{n\pi}{2}tdt=$$

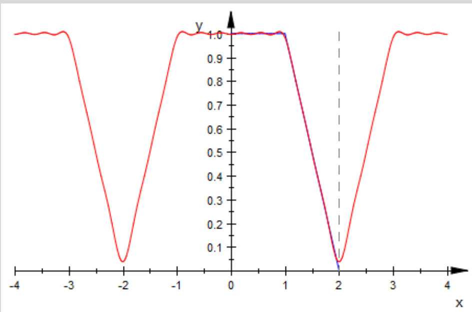
$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t\Big|_0^1+\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t\Big|_1^2-\frac{2t}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t\Big|_1^2-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}t\Big|_1^2=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}-0\right]+\frac{4}{n\pi}\left[0-\sin\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{2}{n\pi}\left[0-\sin\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right]=$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$$

<u>טור קוסינוסים:</u>

$$\Rightarrow f(t)=\frac{3}{4}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi}{2}t}{n^2}$$



ב. הטור מתכנס לערך 0 – ממוצע של הגבולות החד צדדיים.

<u>שאלה 17</u>

נתון: $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $g(x)=x^2$.

חשב את הקונבולוציה $(f*g)(x)$.

<u>פתרון:</u>

$$(f*g)(x)=\int_0^1 (x-t)^2dt=\left[-\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\left[x^3-(x-1)^3\right]=x^2-x+1/3$$

<u>שאלה 18</u>

נתונה הפונקציה הבאה :

$$f_a(x)=\begin{cases}a-|x| & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}\qquad (a>0)$$

א. מצא/י את התמרת פורייה של $f_a(x)$.

ב. חשב/י את $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos\omega)(1-\cos 2\omega)}{\omega^4}d\omega$

<u>פתרון:</u>

א. על פי ההגדרה נקבל:

$$F[f_a](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_a(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}(a-|x|)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{a}(a-x)e^{-i\omega x}dx=...=\frac{1-\cos a\omega}{\pi\omega^2}$$

ב. על פי שוויון פלנשראל המוכלל נקבל כי:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos\omega)(1-\cos 2\omega)}{\omega^4}d\omega=\pi^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)(2-|x|)dx==\pi\int\limits_{0}^{1}(2-3x+x^2)dx=\frac{5\pi}{6}$$

<u>שאלה 19</u>

נתונה הפונקציה $h_a(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$, המוגדרת לכל x ממשי ולכל $a\neq 0$ (פרמטר ממשי).

א. חשב את התמרת פורייה של $h_a(x)$. (רמז: העזר בהתמרה של $e^{-|x|}$).

ב. העזר בתוצאה של סעיף א' והוכח כי

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+9)(x^2+25)}dx=\frac{\pi}{120}$$

<u>פתרון:</u>

א. ראינו בהרצאה כי

$$e^{-|x|}\xrightarrow{F}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$$

ע"פ עיקרון הדואליות נקבל כי

$$\frac{1}{x^2+a^2}\xrightarrow{F} e^{-|a\omega|}\frac{1}{2|a|}$$

ב. ע"פ משפט פלנשראל נקבל כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot G(\omega)d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\cdot\frac{1}{x^2+b^2}\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-|a\omega|}\frac{1}{2|a|}\cdot e^{-|b\omega|}\frac{1}{2|b|}\right]d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\cdot\frac{1}{x^2+b^2}\right]dx=\frac{2\pi}{4|a||b|}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-|a\omega|-|b\omega|}\right]d\omega=\frac{\pi}{|a||b|(a+b)}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x^2+3^2}\cdot\frac{1}{x^2+5^2}\right]dx=\frac{\pi}{3\cdot5\cdot(3+5)}=\frac{\pi}{120}$$

<u>שאלה 20</u>

מצא פתרון למשוואה הבאה:

$$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau=t\cos t,\ \ (t\ge 0)$$

<u>פתרון</u>

נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים:

מהגדרת הקונבולוציה נקבל כי

$$L[\cos t * y(t)](s)=L[t\cdot\cos t](s)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{s^2+1}Y(s)=-\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'=-\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}$$

נבודד את $Y(s)$:

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}$$

ההתמרה ההפוכה מובילה לפתרון הבא:

$$\Rightarrow y(t)=2\cos t-1$$

שאלה 21

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במרחב $G(\mathbb{R})$ בעלת התמרת פורייה

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\omega^2-\pi^2, & |\omega|\le\pi\\ 0, & |\omega|>\pi\end{cases}$$

א. מצא את הפונקציה $f(x)$

ב. חשב את ערך האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$

פתרון:

א. לפי משפט ההתמרה ההפוכה נקבל כי לכל $x\in R$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\omega^2-\pi^2\right)e^{i\omega x}d\omega=2\int_{0}^{\pi}\left(\omega^2-\pi^2\right)\cos\omega x d\omega$$

מכאן, ל- $x\neq 0$

$$f(x)=2\left(\omega^2-\pi^2\right)\frac{\sin\omega x}{x}\bigg|_{\omega=0}^{\omega=\pi}-\frac{2}{x}\int_{0}^{\pi}2\omega\sin\omega x d\omega=4\frac{\pi x\cos\pi x-\sin\pi x}{x^3},\quad x\neq 0$$

מצד שני, היות ו-$f(x)$ פונקציה רציפה, נקבל:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}4\frac{\pi x\cos\pi x-\sin\pi x}{x^3}=-\frac{4}{3}\pi^3$$

ולסיכום נקבל:

$$f(x)=\begin{cases}4\dfrac{\pi x\cos\pi x-\sin\pi x}{x^3}, & x\neq 0\\ -\dfrac{4}{3}\pi^3, & x=0\end{cases}$$

ב. לפי משפט פלנשראל,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\omega^2-\pi^2\right)^2d\omega=\frac{16}{15}\pi^5$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|=\frac{32}{15}\pi^6$$

שאלה 22

מצא/י פתרון של בעיית התחלה $\begin{cases} y''-3y'+2y=f(t) \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0 \end{cases}$, כאשר $f(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<1 \\ 0, & 1\le t<2 \\ 1, & 2\le t<3 \\ 0, & 3\le t<\infty \end{cases}$.

פתרון:

על מנת לפתור משוואה דיפרנציאלית זו ניעזר בהתמרת לפלס. נחשב את התמרת לפלס של שני האגפים ונתחיל מהאגף הימני של המשוואה. נשים לב כי $f(t)$ ניתנת להצגה בעזרת פונקצית Heaviside באופן הבא:

$$f(t)=[H_0(t)-H_1(t)]+[H_2(t)-H_3(t)]$$

כלומר

$$L[H_c(t)](s)=\frac{e^{-cs}}{s} \Rightarrow L[f(t)](s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

כעת נחשב את ההתמרה של אגף שמאל:

$$L[y''-3y'+2y]=s^2L[y]-sy(0)-y'(0)-3sL[y]-3y(0)+2L[y]=L[y](s^2-3s+2)$$

ולסיכום נקבל כי

$$L[y](s^2-3s+2)=L[f(t)](s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$\Rightarrow L[y]=\frac{1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}}{s(s^2-3s+2)}=\left(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}\right)\frac{1}{s(s-1)(s-2)}$$

נפרק את הביטוי האחרון לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=-1, \quad C=\frac{1}{2}$$

ידוע כי $L[e^{at}](s)=\frac{1}{s-a}, s>a$, כלומר

$$L^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\right]=\frac{1}{2}-e^t+\frac{1}{2}e^{2t}$$

כעת נשתמש בתכונה הבאה שקשורה להתמרה של פונקצית Heaviside:

$$L[H_c(t)g(t-c)](s)=e^{-cs}L[g(t)](s)$$

או

$$H_c(t)g(t-c)=L^{-1}\left(e^{-cs}L[g(t)](s)\right)$$

במקרה שלנו $g(t)=\frac{1}{2}-e^t+\frac{1}{2}e^{2t}$ ולכן נקבל את פתרון המשוואה הדיפרנציאלית באופן הבא:

$$y(t)=L^{-1}\left[\left(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}\right)\frac{1}{s(s-1)(s-2)}\right]=$$
$$=L^{-1}[g(t)]-L^{-1}\left[e^{-s}g(t)\right]+L^{-1}\left[e^{-2s}g(t)\right]-L^{-1}\left[e^{-3s}g(t)\right]$$

או בצורה מפורשת:

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}-e^{t}+\frac{1}{2}e^{2t}\right)-H_1(t)\left(\frac{1}{2}-e^{t-1}+\frac{1}{2}e^{2(t-1)}\right)+$$
$$+H_2(t)\left(\frac{1}{2}-e^{t-2}+\frac{1}{2}e^{2(t-2)}\right)-H_3(t)\left(\frac{1}{2}-e^{t-3}+\frac{1}{2}e^{2(t-3)}\right)$$

<u>שאלה 23</u>

א. כתוב מטריצת DFT מסדר 6.
ב. חשב FFT של הסדרה הבאה: [9 6 2 2].
ג. חשב FFT של הסדרה הבאה: [9 6 2 2 9 6 2 2].

<u>פתרון:</u>

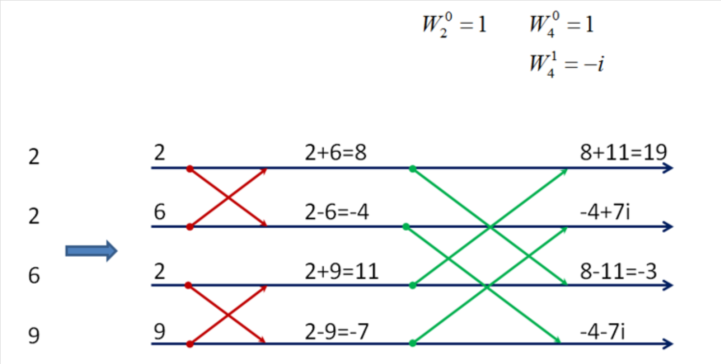
א. מטריצת DFT מסדר 6 מוגדרת באופן הבא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} \\ 1 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25} \end{bmatrix}$$

כאשר $\omega=e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ ו- $N=6$. בהתאם לכך נקבל את התוצאות הבאות:

$$\omega=\omega^7=\omega^{13}=\omega^{19}=\omega^{25}=e^{-\frac{\pi i}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\omega^2=\omega^8=\omega^{14}=\omega^{20}=e^{-\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\omega^3=\omega^9=\omega^{15}=\omega^{21}=e^{-\frac{3\pi i}{3}}=-1$$
$$\omega^4=\omega^{10}=\omega^{16}=\omega^{22}=e^{-\frac{4\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\omega^5=\omega^{11}=\omega^{17}=\omega^{23}=e^{-\frac{5\pi i}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\omega^6=\omega^{12}=\omega^{18}=\omega^{24}=e^{-\frac{6\pi i}{3}}=1$$

ב.



ג.

בהתאם לתכונת המחזוריות של FFT ולפי התוצאה בסעיף הקודם, נקבל כי

FFT([2 2 6 9 2 2 6 9])=[38 0 -8+14i 0 -6 0 -8-14i 0]