

## תרגיל 9

פתרו 4 מתוך 6 השאלות הבאות.

### שאלה 1

עבור סדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקציית הגבול (אם היא קיימת), וקבעו אם ההתכנסות היא נקודתית או במידה שווה.

1.  $f_n(x) = \cos^{2n}(x)$  בקטע  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2.  $f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}$  ב  $\mathbb{R}$

3.  $f_n(x) = x^n - x^{2n}$  בקטע  $(-1, 1)$

4.  $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$  בקטע  $(0, \infty)$

### שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

1. אם  $f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $I$  ו  $g_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $g(x)$  בקטע  $I$  אז  $f_n(x) + g_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x) + g(x)$  בקטע  $I$

2. אם  $f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $I$  אז  $g(x)f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $g(x)f(x)$  בקטע  $I$

3. אם הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  מתכנס במידה שווה ל  $S(x)$  בקטע  $I$  אז הסדרה  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ל 0 בקטע  $I$ .

4. אם  $f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $I$  וכל אחת מהפונקציות  $f_n(x)$  היא רציפה במ"ש ב  $I$  אז גם  $f(x)$  רציפה במ"ש ב  $I$ .

### שאלה 3

תהי  $f_n(x)$  סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ל  $f(x)$  בקטע  $[a, b]$  אך אינה מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע זה.

הוכיחו כי היא לא מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $(a, b)$ .  
רמז: השתמשו במבחן ה  $\lim\text{-sup}$ .

### שאלה 4

החליטו אם הטורים הבאים מתכנסים, מתכנסים במ"ש או מתבדרים בתחום הנתון

1.  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$  בתחום  $(-a, a)$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$  בתחום  $[0, \infty)$

3. בתחום  $[0, \infty)$  (רמז: טור הנדסי) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

### שאלה 5

מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

בקטע  $(-1, 1)$ .  
שימו לב: הטור אינו מתכנס במ"ש ב  $(-1, 1)$ , אך ניתן לעקוף בעיה זו.

### שאלה 6

מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$$