# פתרון תרגיל 11 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

31 במאי 2016

1. המשטח הוא:

$$r(\theta,\phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi)$$

כמו שראינו בעבר, המטריקה נתונה על ידי:

$$G = \cosh^2\phi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לפיכך הקואורדינטות אכן איזותרמיות, כאשר $\lambda = \cosh^2\phi$. לכן:

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\left(\cosh^2\phi\right)\right) = -\frac{1}{\cosh^2\phi}\Delta\left(\ln\left(\cosh\phi\right)\right)$$

נגזור פעמיים לפי $\phi$:

$$\ln(\cosh\phi) \Longrightarrow \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi \Longrightarrow \frac{1}{\cosh^2\phi}$$

הנגזרת פעמיים לפי $\theta$ מתאפסת ולכן: $\Delta\left(\ln\left(\cosh\phi\right)\right) = \frac{1}{\cosh^2\phi}$, ובסך הכל:

$$K = -\frac{1}{\cosh^2\phi}\cdot\frac{1}{\cosh^2\phi} = -\frac{1}{\cosh^4\phi}$$

2. זו הפסאודוספירה שלנו.

   (א) וקטורי הנגזרות הם:

$$r_\theta = R\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{\cosh\phi}, \frac{\cos\theta}{\cosh\phi}, 0\right)$$

$$r_\phi = R \cdot \left( -\frac{\cos\theta \tanh\phi}{\cosh\phi}, -\frac{\sin\theta\tanh\phi}{\cosh\phi}, \tanh^2\phi \right)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_\theta \times r_\phi = R^2 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\sin\theta}{\cosh\phi} & \frac{\cos\theta}{\cosh\phi} & 0 \\ -\frac{\cos\theta\tanh\phi}{\cosh\phi} & -\frac{\sin\theta\tanh\phi}{\cosh\phi} & \tanh^2\phi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \cdot \left( \frac{\cos\theta\tanh^2\phi}{\cosh\phi}, \frac{\sin\theta\tanh^2\phi}{\cosh\phi}, \frac{\tanh\phi}{\cosh^2\phi} \right)$$

הנורמה היא:

$$\|r_\theta \times r_\phi\| = R^2 \sqrt{\frac{\cos^2\theta\tanh^4\phi}{\cosh^2\phi} + \frac{\sin^2\theta\tanh^4\phi}{\cosh^2\phi} + \frac{\tanh^2\phi}{\cosh^4\phi}} =$$

$$= \frac{R^2\tanh\phi}{\cosh\phi}\sqrt{\tanh^2\phi + \frac{1}{\cosh^2\phi}} = \frac{R^2\tanh\phi}{\cosh\phi}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_\theta \times r_\phi}{\|r_\theta \times r_\phi\|} = \left( \cos\theta\tanh\phi, \sin\theta\tanh\phi, \frac{1}{\cosh\phi} \right)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta\tanh\phi, \cos\theta\tanh\phi, 0) = \frac{\sinh\phi}{R} \cdot r_\theta + 0 \cdot r_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = \left( \frac{\cos\theta}{\cosh^2\phi}, \frac{\sin\theta}{\cosh^2\phi}, -\frac{\tanh\phi}{\cosh\phi} \right) = 0 \cdot r_\theta - \frac{1}{R\sinh\phi} \cdot r_\phi$$

לכן:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\sinh\phi}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R\sinh\phi} \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$K = \det W = -\frac{1}{R^2}$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם: $\left(R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\left(\cos\phi+\ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right)\right)$

$$r_\theta = R\cdot(-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0)$$

$$r_\phi = R\cdot\left(\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi+\frac{1}{\sin\phi}\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_\theta\times r_\phi = R^2\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\end{vmatrix} =$$

$$= R^2\cdot\left(\cos\theta\cos^2\phi, \sin\theta\cos^2\phi, -\sin\phi\cos\phi\right)$$

הנורמה היא:

$$\|r_\theta\times r_\phi\| = R^2\sqrt{\cos^2\theta\cos^4\phi+\sin^2\theta\cos^4\phi+\sin^2\phi\cos^2\phi} = R^2\cos\phi$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_\theta\times r_\phi}{\|r_\theta\times r_\phi\|} = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) = \frac{\cot\phi}{R}\cdot r_\theta + 0\cdot r_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi) = 0\cdot r_\theta - \frac{\tan\phi}{R}\cdot r_\phi$$

לכן:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\cot\phi}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\phi}{R}\end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$K = \det W = -\frac{1}{R^2}$$

3. נתבונן במישור:

$$r(u,v) = (u,v,0)$$

ובגליל:

$$r\left(u,v\right)=\left(\cos u,\sin u,v\right)$$

אנו יודעים שהמטריקות של שני המשטחים זהות:

$$G=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)$$

ולכן התכונות הפנימיות זהות.
מצד שני, אנו יודעים שהעקמומיות הממוצעת של המישור היא $H=0$.
וקטורי הנגזרות של הגליל הם:

$$r_u=\left(-\sin u,\cos u,0\right),r_v=\left(0,0,1\right)$$

הנורמל הוא

$$r_u\times r_v=\left|\begin{array}{ccc}i & j & k\\ -\sin u & \cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right|=\left(\cos u,\sin u,0\right)$$

הנורמה היא 1, ולכן: $\vec{n}=\left(\cos u,\sin u,0\right)$. נגזור:

$$\vec{n}_u=\left(-\sin u,\cos u,0\right)=1\cdot r_u+0\cdot r_v$$

$$\vec{n}_v=\left(0,0,0\right)=0\cdot r_u+0\cdot r_v$$

כלומר:

$$W=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right)$$

ולכן:

$$H=\frac{1}{2}trW=\frac{1}{2}$$

ואם כן העקמומיות $H$ אכן שונה בכל אחד מהמשטחים, ולכן זו אינה תכונה פנימית.