אנליזה הרמונית - תרגול מס' 2

יובל חצ'טריאן

20 בנובמבר 2017

1 שוויון פרסבל

אם $f\in[-\pi,\pi]$ רציפה למקוטעין אזי מתקיים השוויון

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,\mathbf{d}x=\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$$

כאשר a_n ו b_n הם המקדמי פורייה.

דוגמא 1.1 כזכור, הטור פורייה של x^2 הינו

$$.x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

נציב בפרסבל ונקבל

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4=\frac{2\pi^4}{5}=\frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

זה נכון מכיוון ש $a_0=\frac{2}{3}\pi^2$. נעביר אגפום ונקבל

$$\frac{8\pi^4}{45}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

נחלק את הסכום ב 16ונקבל את השוויון

$$.\frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

2 התכנסות במידה שווה

הגדרה 2.1 תהי $f_n:[a,b]\to\mathbb{C}$ סדרה של פונקציות. נאמר $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$מתכנס במידה שווה ל f אם לכל $\epsilon>0$ קיים N כך שאם $n>N$ אזי $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ לכל $x\in[a,b]$. נאמר שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $F(x)$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>m$ מתקיים

$$\left|\sum_{n=0}^{m}f_n(x)-F(x)\right|<\epsilon$$

לכל $x \in [a,b]$.

משפט 2.2 אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $F(x)$ אזי פונקציית הגבול רציפה.

שאלה 2.3 האם $\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ מתכנס במידה שווה ל $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

תשובה: לא. פונקציית הגבול אינה רציפה ולכן אין התכנסות במ"ש.

משפט 2.4 נניח ש f רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ גזירה פרט למספר סופי של נק' כך ש f' גם רציפה למקוטעין. אזי f הטור פורייה של f מתכנס במ"ש ל f.

שאלה 2.5 האם הפונקציה $f(x) = \sqrt{|x|}$ מקיימת את תנאי המשפט ב $[-\pi,\pi]$.

תשובה: לא. הפונקציה אמנם רציפה אבל לא קיימים הגבולות החד צדיים ב 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$$

הגבול הימני ב 0 של הנגזרת לא קיים ולכן f אינה גזירה שם.

שאלה 2.6 האם הטור פורייה של $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \neq \pm\pi \\ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} & x = \pm\pi \end{cases}$ מתכנס במ"ש ב $[-\pi,\pi]$?

תשובה: לא. הפונקציה אינה רציפה בקצוות הקטע.

שאלה 2.7 האם הטור פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ מתכנס במ"ש ל f ב $[-\pi,\pi]$.

תשובה: כן. הפונקציה רציפה ו $f(-\pi) = f(\pi)$. נבדוק האם הנגזרת רציפה. עבור $x \neq 0$ מתקיים

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

עבור $x = 0$ נגזור לפי ההגדרה.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{t\to\pm\infty} te^{-t^2} = 0$$

הנגזרת אכן רציפה:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

משפט 2.8 אם f מנורמלת, רציפה למקוטעין וגזירה למקוטעין ב $[-\pi,\pi]$ ו $p_1,\ldots,p_n$ הן הנק' אי רציפות של f אזי הטור של f מתכנס במ"ש בכל $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$.

דוגמא 2.9 הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$$

מתכנס במ"ש ל x בכל קטע $[-b,b]$ עבור $b < \pi$.

3 גזירה איבר ־ איבר.

תהי f פונקציה מנורמלת, רציפה וגזירה למקוטעין בעלת פיתוח פורייה

$$.f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \cos nx$$

אם נגזור את הטור רכיב־רכיב נקבל טור חדש:

$$.\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$$

שאלה 3.1 האם הטור המתאים פיתוח פורייה של f' הינו

$$.f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$$

תשובה: לא בהרכח. ניקח

$$.f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

$f'(x) = 1$ פרט למספר סופי של נקודות והטור המתאים ל $f'(x)$ הוא 1. מצד

$$.x \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

אם נגזור רכיב רכיב נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2 \cos nx$$

שכלל לא מתכנס.

משפט הבא מביא את התנאים בהם גזירה רכיב רכיב של הטור נותנת את הטור של הנגזרת.

משפט 3.2 נניח ש f רציפה ב $[-\pi,\pi]$, גזירה למקוטעין ומתקיים $f(\pi) = f(-\pi)$. אזי פיתוח פורייה של $f'(x)$ הינו

$$.f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$$

דוגמא 3.3 נתבונן בטור של x^2 ב $[-\pi,\pi]$ כזכור

$$.x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos nx$$

נגזור איבר איבר ונקבל

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n \cos nx}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$.x \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

דוגמא 3.4 נחשב את הטור של $\mathbf{sgn} x$ ב $[-\pi,\pi]$. נשים לב שפרט למספר סופי של נקודות

$$.\mathbf{sgn}(x) = |x|'$$

נזכר שהטור של $|x|$ הינו

$$. |x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

נגזור ונקבל

$$.\mathbf{sgn} x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$$