.1 (30 נק') תהי סדרה עבורה $a_1 > 12$ המקיימת לכל n טבעי כי:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$$

ונביט בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{9 \cdot a_n}{a_1}\right)^{2 \cdot n}$$

א. (10 נק') מצאו את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

ב. (10 נק') מצאו ערך של $a_1 > 12$ עבורו הטור מתכנס בהחלט.
אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

ג. (10 נק') מצאו ערך של $a_1 > 12$ עבורו הטור מתבדר.
אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

$$a_2 = \sqrt{12 + 6} = \sqrt{18} < 12 < a_1$$

זה שלב הבדיקה של ההוכחה באינדוקציה כי הסדרה יורדת.

יהי n עבורו $a_{n+1} < a_n$ נוכיח כי $a_{n+2} < a_{n+1}$

צ"ל כי

$$\sqrt{a_{n+1} + 6} < \sqrt{a_n + 6}$$

זה נובע מהנחת האינדוקציה

לכן הסדרה יורדת, וכיוון שהיא אי שלילית (הרי שורש תמיד אי שלילי) היא חסומה מלרע ע"י אפס ולכן מתכנסת. נסמן את הגבול

$$a_n \to L$$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a_n + 6}$$

$$L = \sqrt{L + 6}$$

$$L^2 = L + 6$$

$$L^2 - L - 6 = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = 3, -2$$

הפתרון -2 נפסל, כי הוא בכלל לא פתרון למשוואה $L = \sqrt{L + 6}$

ולכן סה"כ $a_n \to 3$

סעיף ב':

צ"ל ערך של a_1 עבורו הטור הבא מתכנס בהחלט

$$\sum (-1)^n \left(\frac{9a_n}{a_1}\right)^{2n}$$

נחשב את הגבול של השורש

$$\sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{9a_n}{a_1}\right)^{2n}\right|} = \left(\frac{9a_n}{a_1}\right)^2 \to \left(\frac{27}{a_1}\right)^2$$

רוצים שזה יהיה קטן מ1, ולכן נבחר $a_1 > 27$ למשל $a_1 = 28$

סעיף ג':

בהמשך לחישובינו מסעיף ב', נבחר $12 < a_1 < 27$ למשל $a_1 = 13$

כי אז גבול השורש גדול מאחד ולכן הטור מתבדר.

א. (10 נק') גבול הסדרה:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+8}\right)^{n+2}$$

$$\lim \left(\frac{n+1}{n+8}\right)^{n+2} = e^{\lim (n+2)\left(\frac{n+1}{n+8}-1\right)} = e^{-7}$$

$$\lim (n+2)\left(\frac{n+1}{n+8}-1\right) = \lim (n+2)\left(\frac{-7}{n+8}\right) = -7$$

ב. (10 נק') גבול הסדרה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{5^n+4^n}$$

$$\lim \frac{6^n}{5^n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \lim \left(\frac{6}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \infty$$

כיוון ש $\frac{6}{5} > 1$ נובע כי $\left(\frac{6}{5}\right)^n \to \infty$

כיוון ש $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ נובע כי $\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$

ג. (10 נק') גבול הפונקציה:

$$\lim_{x\to -6}\frac{x^3+7\cdot x^2-36}{x^2+8\cdot x+12}$$

$$=\left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\}=\lim_{x\to -6}\frac{3x^2+14x}{2x+8}=-6$$

אם לא היה כלל לופיטל היינו מחלקים את שני הפולינומים ב $x+6$.

3. (48 נק') תהי פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+(-2\cdot a-6)\cdot x+a^2+6\cdot a+8}{x+2} & x>-2\\ x & x\le -2\end{cases}$$

א. (12 נק') כתבו את כל ערכי a עבורם הפונקציה רציפה בנקודה $x=-2$

ב. (12 נק') כתבו את כל ערכי a עבורם הפונקציה רציפה במ"ש בקטע $(-2,0)$

ג. (12 נק') כתבו את כל ערכי a עבורם הפונקציה גזירה בנקודה $x=-2$

ד. (12 נק') נתון כי הפונקציה גזירה בנקודה $x=-2$, חשבו את הנגזרת $f'(-2)$

סעיף א'

הגבול משמאל הוא כמובן -2 לצורך רציפות צריך לוודא שזה גם יהיה הגבול מימין

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-(2a+6)x+a^2+6a+8}{x+2}=\left\{\frac{4+4a+12+a^2+6a+8}{0}=\frac{a^2+10a+24}{0}\right\}=$$

אם המונה $a^2+10a+24$ שונה מאפס, הפונקציה לא תהיה רציפה, כי הגבול החד צדדי לא יהיה סופי (למעשה מדובר באי רציפות עיקרית).

כלומר רק עבור $a=-4,-6$ יש סיכוי

נציב $a=-4$

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}x=-2$$

והפונקציה תהא רציפה במקרה זה.

נציב $a=-6$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+6x+8}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x+2)(x+4)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} x+4 = 2$$

הפונקציה אינה רציפה במקרה זה.

סעיף ב':

עבור $a \neq -4,-6$ ראינו שהפונקציה אינה חסומה בקטע $(-2,0)$ ולכן אינה רציפה במ"ש.

עבור $a=-4,6$ יש גבול סופי ב-2 כלומר יש גבולות סופיים בקצות הקטע $(-2,0)$ וכיוון שהפונקציה רציפה שם יחד עם הגבולות הסופיים בקצוות היא רציפה במ"ש.

סעיף ג':

יש סיכוי לגזירות רק כאשר יש רציפות, לכן נבדוק גזירות עבור $a=-4$

אבל עבור $a=-4$ יוצא שהפונקציה היא בעצם $f(x)=x$ והיא וודאי גזירה ב-2

סעיף ד':

בהמשך לסעיף ג', אם הפונקציה גזירה אזי $f(x)=x$ ולכן $f'(x)=1$ בכל הממשיים, ובנקודה $x=-2$ בפרט