1. ישירות מהגדרת גבול חלקי מקבלים כי $L_1, L_2, \ldots, L_M$ כולם גבולות חלקיים של a, ומה שיש להראות הוא רק שאין גבולות חלקיים נוספים. נניח בשלילה כי x הוא גבול חלקי של a_n באשר $x \notin \{L_1, \ldots, L_M\}$.

תהי a_{n_k} ת"ס של a_n המתכנסת ל-x. כיוון ש-$\cup_i Im(c_i) = \mathbb{N}$, סדרת האינדקסים n_k מכילה אינסוף איברים לפחות מאחת מהסדרות c_i. נניח בה"כ כי היא מכילה אינסוף איברים מהסדרה c_1. לכן נוכל להסתכל על תת-הסדרה n_{k_r} אשר מורכבת כולה מאיברי הסדרה c_1. לכן $a_{n_{k_r}}$ היא תת-סדרה של b_1, ובפרט $a_{n_{k_r}} \to L_1$, אך $a_{n_k} \to x$, ובפרט $a_{n_{k_r}} \to x$, כלומר מיחידות הגבול $x = L_1$ בסתירה לכך ש-$x \notin \{L_1, \ldots, L_M\}$. מש"ל.

2. נסמן $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ באשר $n \in \mathbb{N}$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

וכך הלאה. כזכור, L הוא גבול חלקי של סדרה אמ"מ בכל סביבה של L יש אינסוף איברים מהסדרה.

אצלנו, כל איברי A מופיעים בסדרה זו אינסוף פעמים ולכן ודאי בכל סביבה של כל אחד מאיברי A יש אינסוף מאיברי הסדרה, ולכן כל איברי A הם גבולות חלקיים של הסדרה.

מצד שני, אין גבולות חלקיים אחרים, למשל לפי שאלה 1 (לחלופין קל להוכיח ישירות שלכל $x \neq A$ בסביבה מספיק קטנה לא יהיה אף איבר מאיברי הסדרה בסביבה זו).

3. א. הוכחה: אם $a_n \leq L$ החל ממקום מסוים אז גם לכל ת"ס a_{n_k} מתקיים כי $a_{n_k} \leq L$ החל ממקום מסוים (הרי כל איברי a_{n_k} הם בפרט איברי a_n). תהי a_{n_k} ת"ס מתכנסת, ונסמן גבולה A. אז לפי כך שאם $b_n \leq c_n$ החל ממקום מסוים אז $\lim(b_n) \leq \lim(c_n)$, מקבלים כי $\lim(a_{n_k}) \leq L$ כלומר $A \leq L$. כלומר כל הגבולות החלקיים של הסדרה קטנים-שווים מ-L, כלומר בפרט $limsup(a_n) \leq L$.

ב. הוכחה: נסמן a_{n_k} את ת"ס של a_n עבורה $a_{n_k} \leq L$ לכל k. אם היא איננה חסומה מלרע אז יש לה ת"ס המתכנסת ל-$-\infty$ ולכן $liminf(a_n) = -\infty$ ולכן וודאי השוויון הדרוש מתקיים. מצד שני אם היא כן חסומה מלרע, נניח ע"י M, אז היא חסומה גם מלעיל וגם מלרע ולכן יש לה ת"ס מתכנסת $a_{n_{k_l}}$ שגבולה A מקיים $A \leq L$ לפי אותו הטיעון של סעיף א'. כלומר מצאנו ת"ס מתכנסת של a_n עם גבול קטן-שווה מ-L, כלומר מצאנו גבול חלקי הקטן-שווה מ-L, לכן וודאי הגבול החלקי הקטן ביותר קטן-שווה מ-L.

ג. הוכחה: אותו דבר כמו סעיף א': תהי a_{n_k} ת"ס מתכנסת, ונסמן גבולה ב-A. אז $\mathrm{A} \geq \mathrm{L}$. כלומר כל גבול חלקי של הסדרה גדול-שווה מ-L, ובפרט הגבול החלקי הגדול ביותר גדול-שווה מ-L.

ד. הפרכה: הסדרה .... ,2,8,2,8,2,8 מקיימת כי $a_n \geq 5$ עבור אינסוף n-ים, אך הגבול התחתון שלה הוא 2, ולא מתקיים כי $2 \geq 5$.

4. א. הוכחה: נסתכל על תת-הסדרה $d_n = a_{6n}$. היא תת-סדרה גם של b_n $(d_n = b_{3n})$ וגם של c_n $(d_n = c_{2n})$. לסדרה מתכנסת כל הגבולות החלקיים שווים. לכן כיוון ש-b_n מתכנסת, נניח ל-L, אז כל

גבול חלקי שלה הוא L, ובפרט גבול d_n הוא L. באותו האופן, כיוון ש-c_n מתכנסת, נניח ל-K, אז כל גבול חלקי שלה הוא K, ובפרט גבול d_n הוא K. מיחידות הגבול מקבלים $L = K$ כדרוש.

ב. הפרכה: נסתכל על הסדרה a_n הנתונה ע"י $5,1,1,1,-5,1,1,1,5,1,1,1,-5,1,1,1,\ldots$ וכך הלאה. הסדרה b_n שבמקומות הזוגיים היא הסדרה הקבועה 1 המתכנסת ל-1, ובפרט מתכנסת. הסדרה c_n שבמקומות שהם כפולה של 3 היא גם הקבועה 1 המתכנסת ל-1 ובפרט מתכנסת. לכן מתקיימים נתוני התרגיל. מצד שני הסדרה a_n איננה מתכנסת כי יש לה יותר מגבול חלקי אחד.

5. א. הפרכה: $n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n} \to 1$ (לפי משפט מההרצאה), ובפרט לא מתכנסת לאינסוף.

ב. הפרכה: $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$, ובפרט לא מתכנסת ל-0.

ג. הוכחה: $a_n \to 0$ לכן בפרט קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < 1$.
$b_n \to \infty$ לכן בפרט קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $b_n > 1$. לכן לכל $n > \max(N, N_2)$ מתקיים כי $a_n^{b_n} < a_n$. כלומר לכל $n > \max(N, N_2)$ מתקיים

$$0 < a_n^{b_n} < a_n$$

כיוון ששתי הסדרות בקצוות שואפות ל-0, לפי משפט הסנדויץ' גם הסדרה באמצע שואפת ל-0.

6. א. $$a_n = \left(\frac{n^2-2+3}{n^2-2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{3}{n^2-2}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{3}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{\frac{3n^2}{n^2-2}}$$

לכן $a_n \to e^3$

ב. לפי שאלה 5 סעיף ג', $a_n \to 0$.

ג. $$a_n = \left(\frac{n-a+2a}{n-a}\right)^n = \left(1+\frac{2a}{n-a}\right)^n = \left(\left(1+\frac{2a}{n-a}\right)^{\frac{n-a}{2a}}\right)^{\frac{2an}{n-a}}$$

לכן $a_n \to e^{2a}$

ד. $$a_n = \left(\frac{n^2+n+1-n-1+4}{n^2+n+1}\right)^{3n+2} = \left(1+\frac{3-n}{n^2+n+1}\right)^{3n+2} = \left(\left(1+\frac{3-n}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{3-n}}\right)^{\frac{(3n+2)(3-n)}{n^2+n+1}}$$

לכן $a_n \to e^{-3}$

7. נראה כי a_n סדרת קושי (ובכך נסיים כי בממשיים כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת).
יהי $\epsilon > 0$. מחפשים N כך שלכל $m > n > N$ מתקיים $|a_m - a_n| < \epsilon$.

תחילת חישוב ביניים: יהיו $m > n$ כלשהם. לפי הרמז, ואז לפי אי-שוויון המשולש, ואז לפי הנתון, מקבלים:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \cdots + a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$|a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

הביטוי האחרון שהגענו אליו הוא סכום של סדרה הנדסית עם מנה $q = 2$, איבר ראשון $\frac{1}{2^m}$, ומספר איברים $m - (n+1) + 1 = m - n$. לכן לפי נוסחה לסכום סדרה הנדסית (סופית) מקבלים כי הביטוי האחרון הוא

$$= \frac{\frac{1}{2^m}\left(2^{m-n} - 1\right)}{2 - 1} = 2^{-n} - 2^{-m} < 2^{-n}$$

לכן סה"כ הראנו שלכל $m > n$ מתקיים

$$|a_m - a_n| < 2^{-n}$$

לכן אנחנו רוצים $2^{-n} < \epsilon$ כלומר $2^n > \frac{1}{\epsilon}$ כלומר $n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$.

סוף חישוב ביניים, בחזרה להוכחה:

נבחר $N = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$. ואז לכל $m > n > N$ מתקיים בפרט $n > \left\lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ ולכן $n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$ ולכן $2^{-n} < \epsilon$. לכן לפי החישוב לעיל

$$|a_m - a_n| < 2^{-n} < \epsilon$$

כדרוש.