תרגיל 6

8 בדצמבר 2015

1. נגדיר פונקציה

$$f(x,y,z) = xy^2z^3$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $(3,2,1)$ בכיוון $h = (h_1, h_2, h_3)$, שימו לב ש h לא בהכרח וקטור יחידה.

2. תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ ומקיימת כי

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(t,-t)}{t} = 1$$

מצא את $f_y^{'}(0,0)$.

3. תהי $f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור $\mathbb{R}^2$. נתון

$$\frac{\partial f}{\partial u}(7,1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(7,1) = 3$$

. נגדיר:

$$u(x,y) = 2x + 3y \quad v(x,y) = x - y$$

$$z(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$.

4. תהי $z(x,y)$ גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים במישור הממשי. כתבו את הביטוי

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$$

באמצעות קואורדינטות פולאריות. (כלומר $x = rcos\varphi$ $y = rsin\varphi$ כאשר $r \geq 0$ ו $0 \leq \varphi < 2\pi$)

5. הוכח כי הפונקציות

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, \quad f(x,y) = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

מקיימות את המשוואה

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

6. נתונה פונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

מצא את $f''_{xy}(0,0)$ ואת $f''_{yx}(0,0)$.

7. תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בתחום $D = (0,\infty)\times(0,\infty)$. ונניח ש x,y מבוטאים באמצעות s,t לפי $x = e^{s+t}, \quad y = e^{s-t}$ כך שניתן להגדיר הרכבה

$$g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$$

הוכח כי

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x f_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$