בס"ד

פתרון תרגיל 5 - התפלגויות בדידות

תשובה 1 .

נגדיר מאורע A – מאורע בו ב- k-1 הוצאות הוצא כדור אחד לבן ו- k-2 כדורים שחורים.
מאורע B – מאורע בו בהוצאה ה- k הוצא כדור לבן.

אזי $\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(A\cdot B)=\mathrm{P}(B\mid A)\cdot \mathrm{P}(A)$. $\mathrm{P}(B\mid A)$ היא ההסתברות להוציא כדור לבן בהינתן שהוצאו k-2 כדורים שחורים וכדור אחד לבן ← נשארו בכד 45-k+1 כדורים, מהם 29 לבנים ולכן ההסתברות היא: $\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{29}{46-k}$. כמו כן, $\mathrm{P}(A)=\frac{\binom{30}{1}\binom{15}{k-2}}{\binom{45}{k-1}}$, שכן לכל כדור יש הסתברות שווה שיוציאו אותו. ולכן נקבל

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\binom{30}{1}\binom{15}{k-2}}{\binom{45}{k-1}}\cdot\frac{29}{46-k}$$

נותר רק לבדוק כי $\sum_{k=2}^{17}\mathrm{P}(X=k)=1$.

תשובה 2 .

א. $\Pr(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}$. היות ואנו מחפשים את המקסימום, נגזור את ההסתברות לפי λ ונמצא את k שיקיים את המשוואה:

$$\frac{\partial \mathrm{P}(X=k)}{\partial\lambda}=\frac{1}{k!}\cdot\left(e^{-\lambda}\cdot k\lambda^{k-1}-e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}\right)=0$$
$$e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k-1}\cdot\left(k-\lambda\right)=0$$
$$\Rightarrow\quad k=\lambda$$

וכמובן שאם λ לא שלם אז הערך המקסימלי יהיה אחד הערכים השלמים הצמודים אליו (התפלגות פואסון מקבלת רק ערכים שלמים)...

ב. $$\mathrm{P}(X=even)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=e^{-\lambda}\cdot\frac{e^{-\lambda}+e^{\lambda}}{2}=\frac{e^{-2\lambda}+1}{2}$$

תשובה 3 .

מהנתון

$$P(X=1)=10\cdot P(X=0)$$
$$2\cdot P(X=2)=10\cdot P(X=1)$$
$$\Rightarrow P(X=2)=\frac{10}{2}\cdot P(X=1)=\frac{10^2}{2}\cdot P(X=0)$$

$$3\cdot P(X=3)=10\cdot P(X=2)$$
$$\Rightarrow P(X=3)=\frac{10^3}{3\cdot 2}\cdot P(X=0)$$
$$P(X=4)=\frac{10^4}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot P(X=0)$$
$$\vdots$$
$$P(X=k)=\frac{10^k}{k!}\cdot P(X=0)\quad,\quad \forall k\geq 1$$

בנוסף,

$$P(X=0)=\frac{10^0}{0!}\cdot P(X=0)$$

נותר רק לגלות מהי ההסתברות ש-X הוא אפס ולשם כך נחשב,

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^k}{k!}\cdot P(X=0)=P(X=0)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^k}{k!}=P(X=0)\cdot e^{10}$$
$$\Rightarrow\quad P(X=0)=e^{-10}$$

ולכן לכל k גדול או שווה לאפס :

$$P(X=k)=\frac{10^k\cdot e^{-10}}{k!}$$

כלומר, ל-X יש התפלגות פואסון עם $\lambda=10$.

תשובה 4 .

א. נסמן ב-E את המאורע בו סוללה תפעל יותר מ-13 ימים. ונסמן ב- X_A את אורך החיים של סוללה שנבחרה מקרית ממפעל A. לפי הנתון $X_A\sim G(\frac{1}{20})$ ולכן,

$$P(E\mid A)=P(X_A>13)=\left(1-\frac{1}{20}\right)^{13}=0.513$$

באופן דומה נגדיר את X_B המתפלג $G(\frac{1}{15})$ ולכן $P(E\mid B)=P(X_B>13)=\left(1-\frac{1}{15}\right)^{13}=0.408$

ואת X_C המתפלג $G(\frac{1}{12})$ ולכן $P(E \mid C) = P(X_C > 13) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{13} = 0.323$

ולכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $P(E) = 0.513 \cdot \frac{1}{2} + 0.408 \cdot \frac{1}{6} + 0.323 \cdot \frac{1}{3} = 0.4322$

ב. לפי נוסחת בייס:

$$P(A \mid E) = \frac{P(X_A > 13) \cdot P(A)}{P(E)} = \frac{0.513 \cdot \frac{1}{2}}{0.4322} = 0.594$$