תרגול 8 אינפי 3

16 בינואר 2015

הגדרה:
תהי $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ פונקציה. הדיפרנציאל מסדר n של הפונקציה הוא:

$$d_a^n f(x_1, ..., x_m) = \sum_{\alpha_1 + ... + \alpha_m = n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_m!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_m} x_m}(a) \cdot dx_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot dx_m^{\alpha_m}$$

<u>תרגיל:</u>
תהי $f(x,y) = e^x cosy$. חשבו את $d^3_{(0,0)} f, d^3_{(0,\frac{\pi}{2})} f$.
<u>פתרון:</u>
נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה עד לסדר 3. מסדר 1:

$$f_x = e^x cosy$$

$$f_y = -e^x siny$$

מסדר 2:

$$f_{xx} = e^x cosy$$

$$f_{xy} = -e^x siny$$

$$f_{yy} = -e^x cosy$$

ומסדר 3:

$$f_{xxx} = e^x cosy$$

$$f_{xxy} = -e^x siny$$

$$f_{yyx} = -e^x cosy$$

$$f_{yyy} = e^x siny$$

לפי הנוסחה לדיפרנציאל בנקודה $(0,0)$:

$$\frac{3!}{3!0!}f_{xxx}(0,0)h_1^3 + \frac{3!}{2!1!}f_{xxy}(0,0)h_1^2h_2 + \frac{3!}{1!2!}f_{yyx}(0,0)h_1h_2^2 + \frac{3!}{3!0!}f_{yyy}(0,0)h_2^3$$

כאשר הסימון הוא $h_i = dx_i$.
בנקודה $(0,0)$שלנו:

$$f_{xxx}(0,0) = 1$$

$$f_{xxy}(0,0) = 0$$

$$f_{xyy}(0,0) = -1$$

$$f_{yyy}(0,0) = 0$$

נקבל:

$$d^3_{(0,0)}f = h_1^3 - 2h_1h_2^2$$

בנקודה $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$f_{xxx} = 0, f_{xxy} = -1, f_{xyy} = 0, f_{yyy} = 1$$

ולכן:

$$d^3_{(0,\frac{\pi}{2})}f = h_2^3 - 2h_1^2h_2$$

הגדרה:

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה. פולינום טיילור של הפונקציה הוא:

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k_1} \dots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \dots . \partial^{k_n} x_n} f(a) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{k_i} \cdot \frac{1}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את פולינום טיילור עד סדר 2 של $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ מסביב לנקודה $(1,0)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרות מסדר 1:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ומסדר 2:

$$f_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

בנקודה שלנו, נקבל:

$$f_x(1,0) = 1, f_y(1,0) = 0$$

$$f_{xx}(1,0) = 0, f_{xy}(1,0) = 0, f_{yy}(1,0) = 1$$

$$f(1,0) = 1$$

ולכן פולינום הטיילור יהיה:

$$f(x,y) \approx 1 + (x-1) + \frac{1}{2} y^2$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את פולינום טיילור של $f(x,y)=e^{x^2}sin2y$ סביב הנקודה $(0,0)$ עד סדר 5.

<u>פתרון:</u>

נזכור ש:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

עד סדר 5 נקבל:

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}$$

באופן דומה, בעזרת הטור של $siny$, נקבל שעד סדר 5:

$$sin2y=2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}$$

ולכן פולינום הטיילור יהיה:

$$e^{x^2}sin2y\approx\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}\right)\left(2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}\right)$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $f(x,y)=e^{x^2y^3}$.

1. כתבו פיתוח טיילור של f סביב $(0,0)$ עד סדר 19.

<u>פתרון:</u>

שוב, נזכור את הפיתוח של e^x ונקבל עד סדר 19:

$$e^{x^2y^3}=1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2!}+\frac{x^6y^9}{3!}$$

האיבר הבא יהיה כבר במעלה גבוהה מ-19.

2. מהי $\frac{\partial f}{\partial x^8\partial y^{11}}(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

מכיוון שבפיתוח הטיילור שלנו אין איבר ממעלה 19, ברור ש:

$$\frac{\partial f}{\partial x^8\partial y^{11}}(0,0)=0$$

נקודות קיצון:

איך מוצאים נקודות קיצון בפונקציה של כמה משתנים?

תנאי הכרחי הוא $\nabla f = 0$, ולכן נפתור את המשוואות המתקבלות כדי למצוא נקודות חשודות.

זה שקול לתנאי $f'(x) = 0$ בפונקציה של משתנה אחד.

לאחר מכן, בודקים את מטריצת ההסיאן, המטריצה של הנגזרות השניות.

אם המטריצה חיובית לחלוטין, קרי כל הערכים העצמיים חיוביים (או, באופן שקול, כל המינורים הראשיים חיוביים), זו נקודת מינימום.

אם המטריצה שלילית לחלוטין, קרי כל הערכים העצמיים שליליים (או, באופן שקול, המינורים הראשיים מגודל אי־זוגי שליליים ואלו מגודל זוגי חיוביים), זו נקודת מקסימום.

אם לא זה ולא זה, זו נקודת אוכף.

בדיקה זו היא הכללה של הבדיקה שעשינו בבית הספר עם הנגזרת השנייה; אם הנגזרת השנייה חיובית, זו נקודת מינימום. אם היא שלילית, זו נקודת מקסימום.

אם לא זה ולא זה (ובמשתנה אחד, פירושו $f''(x) = 0$) זו נקודת פיתול.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וסווגו אותן.

1. $u(x, y, z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונקבל את המערכת:

$$u_x = 9x^2 + 6y = 0$$

$$u_y = 2y + 6x = 0$$

$$u_z = 2z - 2 = 0$$

שפתרונה הן הנקודות: $(0,0,1), (2,-6,1)$. מטריצת ההסיאן היא:

$$H_u = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0,0,1)$, נקבל שהמינור השני הוא $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} < 0$ ולכן זו נקודת אוכף.

בנקודה $(2,-6,1)$, נקבל שכל המינורים (או כל הערכים העצמיים) חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

2. $u(x,y)=3(x^2+y^2)+x^3+4y$.

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל את המערכת:

$$u_x=6x-3x^2=0$$

$$u_y=6y+4=0$$

לכן הנקודות החשודות לקיצון הן $(0,-\frac{2}{3}),(2,-\frac{2}{3})$.

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_u=\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0,-\frac{2}{3})$ נקבל ששני הערכים העצמיים חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.
בנקודה $(2,-\frac{2}{3})$ נקבל המינור השני שלילי ולכן זו נקודת אוכף.