תרגיל 4

להגשה עד 11.12.16

שאלה 1

לכל אוסף קיבעו האם האוסף הוא אלגברה, והאם הוא σ־אלגברה.

1. $X = \{1,2,3,4\}$, ו־ $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3,4\}\}$.
2. $X = [0,1]$, ו־ $\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \left\{A \ : \ \left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq A\right\}$.
3. $X = [0,1]$ ו־ $\mathcal{S} = \{A \ : \ \{0,1\} \subseteq A \text{ or } \{0,1\} \cap A = \emptyset\}$.
4. $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ו־ $A \in \mathcal{S}$ אם לכל $(x_n)_{\mathbb{N}} \in A$ מתקיים: $\{(y_n)_{\mathbb{N}} \in X \ : \ y_1 = x_1\} \subseteq A$.

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{S})$ מרחב מדיד ונניח כי μ הינה פונקצית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית כך ש־ $\mu(\emptyset) = 0$ ולכל סדרת קבוצות עולה $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ מתקיים:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

הראו כי μ הינה מידה.

שאלה 3

יהי $(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית. הוכיחו כי הבאים שקולים:

1. לכל $E \in \mathbb{A}$ כך ש $\mu(E) = \infty$, קיימת $F \in \mathbb{A}$ כך ש: $F \subseteq E$ ו: $0 < \mu(F) < \infty$.
2. לכל $E \in \mathbb{A}$ מתקיים: $\mu(E) = \sup\{\mu(F) : \mu(F) < \infty \ ; \ E \supseteq F \in \mathbb{A}\}$.

רמז לכיוון 1⇐2 : נניח בשלילה כי $w := \sup\{\mu(F) : \mu(F) < \infty \ ; \ E \supseteq F \in \mathbb{A}\} < \mu(E)$,
אזי קיימת סדרה $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ב $\mathbb{A}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: $\mu(F_n) < \infty$, ומתקיים:

$$\mu(F_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w.$$

מה ידוע על: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$?

הערה: מידה המקיימת את התנאים בתרגיל זה נקראת מידה סופית מקומית.

שאלה 4

תהי m מידת לבג על הקטע $[0,1]$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq [0,1]$ הינה קבוצה מדידה לבג.
תהי B קבוצת כל ה־x־ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.
הוכיחו כי:

1. B מדידה לבג.
2. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n, אזי $m(B) > 0$.
3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אזי $m(B) = 0$.
4. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ ו־ $m(B) = 0$.

שאלה 5

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0,1]$.
הוכיחו כי הקבוצה $A := \{x \ : \ f_n(x) \to 0\}$ הינה מדידה לבג.

שאלה 6

יהי $(X, \mathbb{S}, \mu)$ ממ"ח. ותהי $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות מדידות $\mathbb{S}$, עבורה מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.
תהי F קבוצת כל האברים בX השייכים לאינסוף קבוצות בסדרה. הוכיחו כי $\mu(F) = 0$.

בהנאה!