

## מעריך תרגול 14 אינפי 1 למדמ"ח

**הגדרה 14.1** תהי  $\langle a_n \rangle$  סדרה. סדרת הסכומים החלקיים של  $a_n$  מוגדרת על ידי

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

**הגדרה 14.2** הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אם ורק אם הסדרה  $S_n$  מתכנסת.

**תרגיל 14.3** האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$  מתכנס?

**פתרון:** נחשב את סדרת הסכומים החלקיים. ראשית נשים לב ש

$$a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

ולכן

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

כלומר מצאנו את סדרת הסכומים החלקיים  $S_n = \ln(n+1)$ . היות ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$$

נקבל כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$  אינו מתכנס.

לכאורה התרגיל לעיל מראה לנו את דרך הפעולה במצב שנתקלים בטור. מחשבים את  $S_n$  ובודקים האם היא מתכנסת (ואם כן, לאן?)

הבעיה היא שבדר"כ מאוד קשה לחשב את  $S_n$  (בטח עם הכלים המועטים שאחנו מכירים כרגע), ולכן בדר"כ השיטה הזאת לא מעשית. אנחנו נצטמצם לשאלה: האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס? (נוותר מראש על הנסיון להבין לאן הוא מתכנס), ונשתמש בכלים עקיפים.

**תזכורת 14.4** אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אז  $a_n \rightarrow 0$ .

**תרגיל 14.5** האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$  מתכנס?

**פתרון:** היות ש  $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  הטור מתבדר.

שימו לב שאפשר להשתמש בכלי זה רק כדי להוכיח התבדרות. אם  $a_n \rightarrow 0$  זה לא אומר שהטור מתכנס.

תהי  $a_n$  סדרה. אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  מתכנס אזי גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

**הגדרה 14.6** אומרים שטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בהחלט אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  מתכנס.

אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אבל  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  לא מתכנס, אומרים שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי.

**הערה 14.7** כל טור חייב להיות אחד מ-3 הסוגים: מתכנס בהחלט/מתכנס בתנאי/מתבדר. טור חיובי לא יכול להתכנס בתנאי.

מעכשיו השאלה המרכזית שלנו תהיה: בהינתן טור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  נרצה לדעת אם הוא מתכנס בהחלט/מתכנס בתנאי/מתבדר.

**תזכורת 14.8** הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  מתכנס אם ורק אם  $p > 1$ .

**תזכורת 14.9** (מבחן השוואה) יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים חיוביים וקיים  $c \in \mathbb{R}$  כך ש  $a_n \leq cb_n$ :

• אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

• אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתבדר.

**תרגיל 14.10** האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2}$  מתכנס? **פתרון:** היות ש

$$\frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

והטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  מתכנס ולכן גם הטור שלנו מתכנס.

**תזכורת 14.11** (מבחן השוואה הגבולי) יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים חיוביים וקיים  $c \in \mathbb{R}$  כך ש  $a_K \leq cb_K$  לכל  $K$  אינסופי.

• אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

• אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתבדר.

**תרגיל 14.12** האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n^2+7n+6}$  מתכנס?

**פתרון:** נראה לנו כאילו הטור צריך להתנהג כמו  $\frac{1}{n}$ . אכן אם נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם  $\frac{1}{n}$  נקבל שלכל  $K$  אינסופי

$$\frac{1}{K} \leq 3 \frac{K+5}{2K^2+7K+6}$$

היות ש  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  טור מתבדר, גם הטור שלנו מתבדר.

**תזכורת 14.13** (מבחן קושי - מבחן השורש) יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור. ונניח ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ .

• אם  $L < 1$  אז הטור מתכנס בהחלט.

• אם  $L > 1$  אז הטור מתבדר.

**תרגיל 14.14** האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n}$  מתכנס?

**פתרון:** במקרה הזה  $a_n = \frac{2^n n^2}{3^n}$  ומתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sqrt[n]{n^2} = \frac{2}{3} < 1$$

ולכן הטור שלנו מתכנס.

**תזכורת 14.15** (מבחן דאלאמבר - מבחן המנה) יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור. ונניח ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ .

• אם  $L < 1$  אז הטור מתכנס בהחלט.

• אם  $L > 1$  אז הטור מתבדר.

**תרגיל 14.16** האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  מתכנס?

**פתרון:** במקרה הזה  $a_n = \frac{n!}{n^n}$  ומתקיים

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

ולכן הטור שלנו מתכנס.

**תזכורת 14.17** (מבחן העיבוי) יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור חיובי כך ש  $a_n$  סדרה מונוטונית יורדת

ומתכנסת ל 0. אזי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  מתכנס.

כדאי לשקול להשתמש במבחן זה אם יש  $\ln$  בביטוי.

**תרגיל 14.18** עבור אילו ערכי  $\alpha \in \mathbb{R}$  הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$  מתכנס?

**פתרון:** אפשר לבדוק ש

$$a_n = \frac{1}{n \ln^\alpha n}$$

היא אכן סדרה מונוטונית יורדת ל 0 (למשל, אפשר להגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^\alpha x}$$

ולוודא ש  $f'(x) < 0$  וש  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  - אבל נוותר על הבדיקה הזאת כאן). נשתמש במבחן העיבוי ונקבל שהטור שלנו מתכנס אם ורק הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\alpha(2)}$$

והטור הזה מתכנס כידוע אם ורק אם  $\alpha > 1$

**תזכורת 14.19** (מבחן לייבניץ) תהי  $a_n$  סדרה חיובית מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0 אזי

הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

**דוגמא 14.20** הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  מתכנס.

תרגילים נוספים אם נשאר זמן.

**תרגיל 14.21** האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים?

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$$

**פתרון:** נשתמש במבחן דאלאמבר

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot 2 \rightarrow 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט. (הטור לא יכול להתכנס בתנאי כי הוא חיובי)

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$$

**פתרון:** ראשית נשים לב שלפי לייבניץ, הטור מתכנס. אבל זה עדיין לא אומר לנו אם הוא מתכנס בהחלט או בתנאי. כדי לבדוק זאת נסתכל על הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$$

מה קורה עם הטור הזה? נשים לב ש  $(\ln n)^2 \leq n$  ולכן

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{(\ln n)^2}$$

היות ש

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

הוא טור מתבדר. נקבל לפי מבחן ההשוואה הגבולי שגם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$  מתבדר.

למסקנה: הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$  מתכנס בתנאי.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + n}{n^2}$$

**פתרון:** נשים לב שאת הטור ניתן לפצל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

הטור הימני מתבדר, והטור השמאלי מתכנס (כי הוא מתכנס בהחלט, הרי

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

סכום של טור מתכנס וטור מתבדר הוא טור מתבדר ולכן הטור שלנו מתבדר.

**תרגיל 14.22** יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור מתכנס. האם גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$  מתכנס?

**פתרון:** לא בהכרח. ניקח  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  מתכנס לפי לייבניץ. ואילו הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

מתבדר.

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור חיובי מתכנס. האם גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$  מתכנס?

**פתרון:** כן. הרי  $a_n \rightarrow 0$  ולכן החל משלב מסוים  $(a_n)^2 \leq a_n$  ולכן לפי מבחן ההשוואה

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$$

גם מתכנס.