חוברת תרגולים בחשבון אינפיניטסימלי 3, 88-230

אלעד עטייא

29 בנובמבר 2015

1 נורמות ומכפלות פנימיות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ (שדה המרוכבים או שדה הממשיים). פונקציה $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ נקראת **מכפלה פנימית** מעל המרחב V**,** אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. ליניאריות ברכיב הראשון: $\langle au+v,w\rangle = a\cdot\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$ לכל $a\in\mathbb{F}$ ולכל $u,v,w\in V$.
2. הרמיטיות: $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.
3. אי־שליליות:
   (א) $\langle v,v\rangle\geq 0$ לכל $v\in V$.
   (ב) $v=0 \iff \langle v,v\rangle=0$.

מרחב שעליו מוגדרת מכפלה פנימית נקרא, למרבה ההפתעה, **מרחב מכפלה פנימית**.

<u>לדוגמה:</u>

1. המכפלות הפנימיות הסטנדרטיות:
   (א) במרחב $\mathbb{R}^n$ נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^n u_iv_i$.

(ב) במרחב $\mathbb{C}^n$ נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\overline{v_i}$.

2. במרחב הסתברותי של משתנים מקריים (מבלי להיכנס לאפיון של מרחב כזה כמרחב וקטורי) נגדיר: $\langle X,Y\rangle=E\left(XY\right)$ כאשר E מסמלת את התוחלת. מתכונות התוחלת ניתן לראות שתכונות המכפלה הפנימית אכן מתקיימות. אפשר גם להגדיר: $\langle X,Y\rangle=COV\left(X,Y\right)$, עם אפיון מעט שונה למרחב הוקטורי.

3. במרחב הפונקציות הרציפות בקטע I, $C[I]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_I f(x)\overline{g(x)}dx$. מתכונות האינטגרל ניתן לראות שזו אכן מכפלה פנימית.

4. במרחב מטריצות מסדר מסוים, נגדיר: $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$. מתכונות העקבה ניתן לראות שזו אכן מכפלה פנימית.

הגדרה 1.2 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $\|\|:V\to\mathbb{R}$ נקראת **נורמה**, אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. אי־שליליות:

(א) $\|u\|\geq 0$ לכל $u\in V$.

(ב) $u=0\iff\|u\|=0$ לכל $u\in V$.

2. הומוגניות: $\|\lambda u\|=|\lambda|\cdot\|u\|$ לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ ולכל $u\in V$.

3. אי־שוויון המשולש: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ לכל $u,v\in V$.

מרחב שעליו מוגדרת נורמה נקרא **מרחב נורמי**.

הגדרה 1.3 יהי V מרחב מכפלה פנימית. **הנורמה המושרית** מהמכפלה הפנימית מוגדרת על ידי:

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

תכונות הנורמה נובעות ישירות מתכונותיה של המכפלה הפנימית במקרה זה.

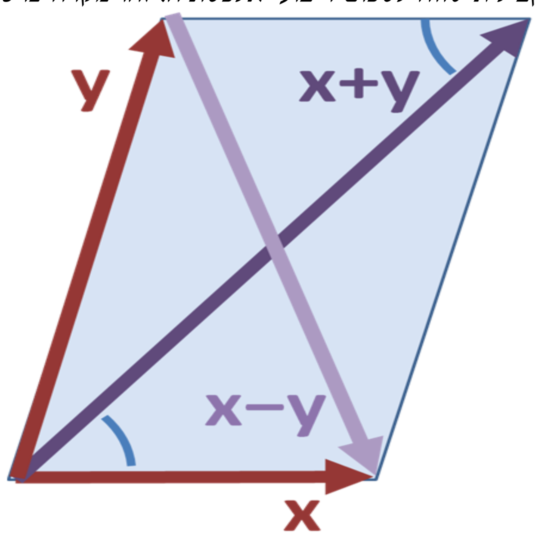
אינטואיטיבית, נורמה מגדירה גודל.

משפט 1.4 יהי V מרחב נורמי. הנורמה מושרית על ידי מכפלה פנימית אם ורק אם היא מקיימת את **שוויון המקבילית**:

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

לכל $u,v\in V$.

כלל המקבילית הוא משפט בגיאומטריה אוקלידית הקבוע כי סכום ריבועי ארבע צלעות המקבילית שווה לסכום ריבועי אלכסוניה. זהו מקרה פרטי של שוויון המקבילית שלנו:



אם שתי הצלעות נתונות על ידי הוקטורים x,y, האלכסונים הם הוקטורים $x-y,x+y$.

<u>תרגיל:</u>

במרחב $C[0,1]$ נגדיר:

$$\|f\|_{max}=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

הראו שזו נורמה. האם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית?

<u>פתרון:</u>

נראה שהפונקציה מקיימת את שלוש התכונות הנדרשות מנורמה.

1. ערך מוחלט הוא אי־שלילי ולכן הפונקציה אי שלילית. כעת, אם $f = 0$, אכן מתקיים: $\|f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max\{0\} = 0$. מצד שני, אם מתקיים

$$\|f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$$

אז מהגדרת מקסימום $|f(x)| \le 0$ לכל איבר בקטע ומהגדרת ערך מוחלט נקבל שאכן $f(x) = 0$.

2. הומוגניות:

$$\|\lambda f\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_{max}$$

.

3. אי־שוויון המשולש:

$$\|f+g\|_{max} = \max_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \le \max_{x\in[0,1]} \{|f(x)|+|g(x)|\}$$

מאי־שוויון המשולש של ערך מוחלט. כעת:

$$\max_{x\in[0,1]} \{|f(x)|+|g(x)|\} \le \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\|_{max} + \|g\|_{max}$$

והוכחנו את הדרוש.

כעת, נבדוק אם שוויון המקבילית מתקיים.

נתבונן בפונקציות: $f(x) = x, g(x) = 1-x$.

מצד אחד, מתקיים: $\|f\|_{max} = \|g\|_{max} = 1$.

מצד שני,

$$\|f+g\|_{max} = \|x+1-x\|_{max} = \|1\|_{max} = 1$$

$$\|f-g\|_{max} = \|x-(1-x)\|_{max} = \|2x-1\|_{max} = 1$$

ואם כך:

$$\|f+g\|_{max}^2+\|f-g\|_{max}^2=2\neq 4=2\cdot(1+1)=2\left(\|f\|_{max}^2+\|g\|_{max}^2\right)$$

כלומר, שוויון המקבילית לא מתקיים, ולפי המשפט הנורמה אינה מושרית ממכפלה פנימית.

<u>דוגמאות נוספות לנורמות:</u>

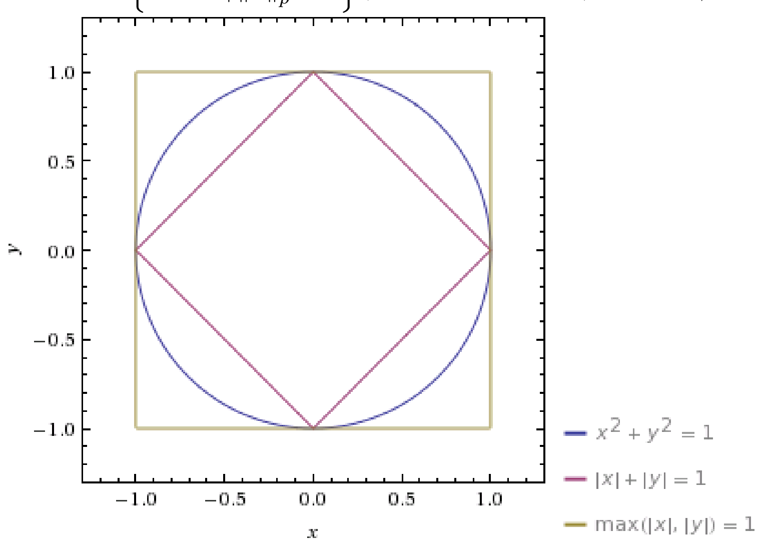
1. נורמת L_p מוגדרת ב־$\mathbb{R}^n$ על ידי:

$$\|u\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

כאשר $p\geq 1$ ממשי או $p=\infty$.

נורמת L_2 היא הנורמה האוקלידית, והיא מכונה גם **הנורמה הסטנדרטית**.

מעניין לראות איך נראה מעגל היחידה, $\left\{x\in\mathbb{R}^2|\ \|x\|_p=1\right\}$עבור ערכים שונים של p:



כאשר $p=\infty$, אנו נשארים עם הגדולה מבין הקואורדינטות, מכיוון שבשאיפה לאינסוף רק החזק שורד.

2. בהינתן שני מרחבים נורמיים A,B, נורמת האופרטור על המרחב $Hom\left(A,B\right)$

מוגדרת על ידי:

$$\|T\| = \sup_{x\in A, \|x\|_A=1} \|T(x)\|_B$$

כלומר, סופרימום של הנורמות של התמונות של וקטורי היחידה ב$-A$. פשוט.

<u>תרגיל:</u>

האם ההשתנות הכללית (החסומה) של פונקציה היא נורמה במרחב $C[a,b]$?

ההשתנות הכללית $V_b^a(f)$ מוגדרת על ידי: $V_b^a(f) = \sup_\tau \{v(f,\tau)\}$, כאשר:

$$v(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

היא ההשתנות של f לפי החלוקה τ.

הסופרימום הוא על כל החלוקות של הקטע $[a,b]$.

<u>פתרון:</u>

לא. ההשתנות של כל פונקציה קבועה היא 0 אף על פי שהפונקציה עצמה אינה פונקציית האפס.

לכן תכונות האי־שליליות אינה מתקיימת וזו אינה נורמה.

משפט 1.5 אי־שוויון קושי־שוורץ

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי לכל $u,v\in V$ מתקיים:

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|$$

כאשר הנורמה היא הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית.

<u>תרגיל:</u>

הראו שבמרחבים נורמיים בהם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית, אי־שוויון המשולש נובע מאי־שוויון קושי־שוורץ.

<u>פתרון:</u>

$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$, ולכן $2\cdot|\langle u,v\rangle| \leq 2\left(\|u\|\cdot\|v\|\right)$.

נוסיף לשני האגפים $\|u\|^2+\|v\|^2$ ונקבל:

$$2\cdot|\langle u,v\rangle| + \|u\|^2+\|v\|^2 \leq 2\left(\|u\|\cdot\|v\|\right)+\|u\|^2+\|v\|^2 \leq \left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

כעת, לפי הגדרת הנורמה: $\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle$. נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית ובתכונות הצמוד כדי לקבל:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u+v\rangle + \langle v,u+v\rangle = \overline{\langle u+v,u\rangle}+\overline{\langle u+v,v\rangle} =$$

$$= \overline{\langle u,v\rangle}+\overline{\langle u,u\rangle}+\overline{\langle v,u\rangle}+\overline{\langle v,v\rangle} = \|u\|^2+\|v\|^2+\overline{\langle v,u\rangle}+\langle v,u\rangle = \|u\|^2+\|v\|^2+2Re\left(\langle v,u\rangle\right)$$

$$\leq \|u\|^2+\|v\|^2+2\cdot|\langle u,v\rangle| \leq \left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

ואם כך:

$$\|u+v\|^2 \leq \left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

נוציא שורש ונקבל:

$$\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$$

וקיבלנו את הדרוש.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו את אי־השיוויון:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

<u>פתרון:</u>

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}|x_i||x_j| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 + \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i\neq j}}|x_i||x_j| \ge \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

ואם נוציא שורש נקבל את הדרוש. לאי־השיוויון השני, נסמן:

$x = (|x_1|, ..., |x_n|), y = (1, ..., 1)$ ולפי א"ש קושי־שוורץ:

$$| < x, y > | \le ||x|| \cdot ||y||$$

נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| = | < x, y > | \le ||x|| \cdot ||y|| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

ואם נחלק ב־$\sqrt{n}-$ נקבל את הדרוש.

תרגילים נוספים

1. הוכיחו את "אי־שוויון המשולש השני" במרחב נורמי:

$$|\|u\| - \|v\|| \le \|u \pm v\|$$

הסיקו שאם סדרת וקטורים $\{u_n\}$ מקיימת: $\|u_n - u\| \to 0$ אז $\|u_n\| \to \|u\|$.

2. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ותהי $\{x_1, \dots, x_n\}$קבוצה אורתונורמלית. יהי $x \in V$ כלשהו. הוכיחו שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n}|\langle x_i, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

3. יהיו X,Y מרחבים נורמיים. מי מהפונקציות הבאות היא נורמה על $X\times Y$? הסבירו. החיבור והכפל מוגדרים איבר־איבר.

(א) $\|(x,y)\|_1=\|x\|_X+\|y\|_Y$.

(ב) $\|(x,y)\|_2=\|x\|_X\cdot\|y\|_Y$.

(ג) $\|(x,y)\|_3=\max\left\{\|x\|_X,\|y\|_Y\right\}$.

4. הוכיחו את הזהויות הבאות במרחב מכפלה פנימית, כאשר הנורמה היא זו המושרית מהמכפלה הפנימית:

(א) מעל $\mathbb{R}$: $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$.

(ב) מעל $\mathbb{C}$: $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+vi\|^2-i\|u-vi\|^2\right)$.

5. הוכיחו שאם מרחב נורמי $(V,\|\|)$ מעל $\mathbb{R}$ מקיים את שוויון המקבילית, אזי הפונקציה:

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$$

היא המכפלה הפנימית מעל V המשרה את הנורמה.

הדרכה:

יש להוכיח את אקסיומות המכפלה הפנימית ושאכן $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$.

הדבר היחיד שאינו מיידי הוא הליניאריות ברכיב הראשון.

הוכיחו בשלבים ־ קודם אדיטיביות ואז מולטיפלטביות.

פתרונות

1. נוכיח: $|\|u\|-\|v\||\le\|u-v\|$. אי־השוויון השני נובע ממנו:

$$|\|u\|-\|v\||=|\|u\|-\|-v\||\le\|u-(-v)\|=\|u+v\|$$

אם כן, נשים לב לכך ש: $u=v+(u-v)$ ולכן לפי אי־שוויון המשולש:

$$\|u\|\le\|v\|+\|u-v\|\implies\|u\|-\|v\|\le\|u-v\|$$

מאותה הסיבה, $\|v\|-\|u\|\le\|v-u\|$, אך $\|u-v\|=\|v-u\|$ולכן:

$$\|u-v\|\ge\max\{\|v\|-\|u\|,\|u\|-\|v\|\}=|\|u\|-\|v\||$$

והוכחנו את הדרוש. מאי־השוויון נקבל:

$$0\le\|u_n\|-\|u\|\le\|u_n-u\|\to 0$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ', $\|u_n\|-\|u\|\to 0$ כלומר אכן:

$$\|u_n\|\to\|u\|$$

2. נתבונן במרחב הוקטורי $span\{x_1\ldots,x_n,x\}$. נסמן את המימד של המרחב ב־k. אם x תלוי ליניארית ב־$x_1,\ldots,x_n$, המימד הוא n ואם לא אז המימד גדל מעט ־ $n+1$ (קבוצה אורתונורמלית היא בת"ל). בכל אופן, $k\ge n$, ונעבור מ־n ל־k. לפי גרם־שמידט נעבור לבסיס אורתונורמלי: $\{x_1,\ldots,x_k\}$ (כל האיברים זהים לאיברים הקודמים למעט אחד שאולי נוסף). נציג את x כצירוף ליניארי של איברי הבסיס: $x=\sum_{i=1}^k a_ix_i$. כעת, לפי הליניאריות:

$$\|x\|^2=|\langle x,x\rangle|^2\left|\left\langle\sum_{i=1}^k a_ix_i,\sum_{j=1}^k a_jx_j\right\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k|a_ia_j\langle x_i,x_j\rangle|$$

מהאורתונורמליות,

$$\langle x_i,x_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$$

ולכן:

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^k|a_i|^2$$

אך מי הם a_i? לפי ליניאריות:

$$a_i=\sum_{j=1}^k a_j\langle x_i,x_j\rangle=\left\langle x,\sum_{j=1}^k a_jx_j\right\rangle=\langle x_i,x\rangle$$

ולכן:

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2\geq\sum_{i=1}^{k}a_i^2\geq\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}\langle x_i,x\rangle$$

שהרי $k\geq n$.

3. נבדוק האם התכונות מתקיימות.

(א) הפונקציה השנייה אינה נורמה, מכיוון שאי־שליליות אינה מתקיימת; איבר האפס במרחב $X\times Y$ הוא $(0_X,0_Y)$ ולכן איבר מהצורה $(x,0_Y)$ כאשר $x\neq 0_X$ אינו איבר האפס, אך מקיים:

$$\|(x,0_Y)\|_2=\|x\|_X\cdot\|0_Y\|_Y=\|x\|_X\cdot 0=0$$

אפשר לדייק יותר; רק כאשר שני המרחבים הם טריוויאליים, $X=Y=\{0\}$, זוהי אכן נורמה.

(ב) הפונקציות הראשונה והשלישית הן אכן נורמות; נראה זאת.

i. אי־שליליות: מכיוון שלכל $(x,y)\in X\times Y$, $\|x\|_X,\|y\|_Y\geq 0$, נקבל:

$$\|(x,y)\|_1=\|x\|_X+\|y\|_Y\geq 0,\|(x,y)\|_3=\max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\}\geq 0$$

כעת,

$$(x,y)=(0,0)\Longrightarrow\|x\|_X,\|y\|_Y=0\Longrightarrow\|(x,y)\|_3,\|(x,y)\|_1=0$$

לצד שני, אם $(x,y)\neq(0,0)$אז בה"כ $x\neq 0$ ואז $\|x\|_X>0$ ולכן גם:

$$\|(x,y)\|_3,\|(x,y)\|_1>0$$

וסה"כ אי־שליליות מתקיימת עבור שתי הנורמות.

ii. הומוגניות:

$$\|\lambda(x,y)\|_1=\|(\lambda x,\lambda y)\|_1=\|\lambda x\|_X+\|\lambda y\|_Y=|\lambda|\cdot\|x\|_X+|\lambda|\cdot\|y\|_Y=|\lambda|\cdot\|(x,y)\|_1$$

כמו כן:

$$\|\lambda(x,y)\|_3=\|(\lambda x,\lambda y)\|_3=\max\{\|\lambda x\|_X,\|\lambda y\|_Y\}=\max\{|\lambda|\cdot\|x\|_X,|\lambda|\cdot\|y\|_Y\}=|\lambda|\cdot\|(x,y)\|_3$$

ולכן הומוגניות מתקיימת.

iii. א"ש המשולש:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_1=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_1=\|x_1+x_2\|_X+\|y_1+y_2\|_Y\leq$$

$$\leq\|x_1\|_X+\|x_2\|_X+\|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y=\|(x_1,y_1)\|_1+\|(x_2,y_2)\|_1$$

וכן:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_3=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_3=\max\left\{\|x_1+x_2\|_X,\|y_1+y_2\|_Y\right\}\leq$$

$$\leq\max\left\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\right\}+\max\left\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\right\}=\|(x_1,y_1)\|_3+\|(x_2,y_2)\|_3$$

אי־השוויון נובע מכך ש:

$$\|x_1+x_2\|_X\leq\|x_1\|_X+\|x_2\|_X\leq\max\left\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\right\}+\max\left\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\right\}$$

וגם:

$$\|y_1+y_2\|_Y\leq\|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y\leq\max\left\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\right\}+\max\left\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\right\}$$

ואם כן הוכחנו את שלוש התכונות הנדרשות עבור כל אחת מהפונקציות.

4. נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית ב$-\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle-\langle u,u-v\rangle-\langle -v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle+\langle u,v-u\rangle+\langle v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v+v-u\rangle+\langle v,u+v+u-v\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u,2v\rangle+\langle v,2u\rangle\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle u,v\rangle\right) = \langle u,v\rangle$$

ב־$\mathbb{C}$, כל השוויונות למעט האחרון עדיין תקפים, ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle u,v\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

כמו כן:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right) = \frac{i}{4}\left(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\left(\langle u,iv\rangle + \overline{\langle u,iv\rangle}\right) = \frac{i}{2}\left(-i\langle u,v\rangle + i\overline{\langle u,v\rangle}\right) = \frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle - \overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+vi\|^2 - i\|u-vi\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\overline{\langle u,v\rangle}\right) + \frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle - \overline{\langle u,v\rangle}\right) = \langle u,v\rangle$$

והוכחנו את הדרוש.

5. נבדוק שהמכפלה הפנימית משרה את הנורמה, ושתכונות המכפלה הפנימית מתקיימות.

(א) מתקיים:

$$\langle u,u\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+u\|^2 - \|u-u\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|2u\|^2 - \|0\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(4\|u\|^2\right) = \|u\|^2$$

ולכן הנורמה אכן מושרית מהמכפלה הפנימית (אם היא אכן כזו).

(ב) לפי חוקי הנורמה, $\langle u,u\rangle = \|u\|^2 \geq 0$ וגם:

$$u = 0 \iff \|u\| = 0 \iff \langle u,u\rangle = \|u\|^2 = 0$$

ולכן אי־שליליות מתקיימת.

(ג) סימטריות (אנחנו מעל $\mathbb{R}$) היא טריוויאלית:

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|v+u\|^2-\|v-u\|^2\right)=\langle v,u\rangle$$

(ד) נראה שמתקיימת אדיטיביות, כלומר: $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$. נכפיל הכל ב־$8$ כדי לא להתעסק עם שברים, ואנו צריכים להוכיח את השוויון השקול:

$$8\langle u+v,w\rangle-8\langle u,w\rangle-8\langle v,w\rangle=0$$

מהגדרת הפונקציה:

$$=2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2-2\|u+w\|^2+2\|u-w\|^2-2\|v+w\|^2+2\|v-w\|^2=$$

לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u\pm w\|^2+\|v\pm w\|^2\right)=\|u+v\pm 2w\|^2+\|u-v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2+\|u+v-2w\|^2+\|u-v\|^2-\|u+v+2w\|^2-\|u-v\|^2=$$

$$=2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2+\|u+v-2w\|^2-\|u+v+2w\|^2=$$

$$=\left(\|u+v-2w\|^2-2\|u+v-w\|^2\right)-\left(2\|u+v+w\|^2-\|u+v+2w\|^2\right)$$

שוב, לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u+v\pm w\|^2+\|\pm w\|^2\right)=\|u+v\pm 2w\|^2+\|u+v\|^2$$

וזה שקול ל:

$$\|u+v\pm 2w\|^2-2\|u+v\pm w\|^2=2\|\pm w\|^2-\|u+v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$\left(2\left\|w\right\|^{2}-\left\|u+v\right\|^{2}\right)-\left(2\left\|-w\right\|^{2}-\left\|u+v\right\|^{2}\right)=0$$

ולכן אדיטיביות מתקיימת.

(ה) נוכיח מולטיפלטיביות, כלומר $\langle au,v\rangle=a\left\langle u,v\right\rangle$. נעשה זאת בשלבים.

i. ראשית, נוכיח באינדוקציה שהטענה נכונה לכל n טבעי. עבור $n=1$,

$$\langle1\cdot u,v\rangle=\langle u,v\rangle=1\cdot\langle u,v\rangle$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$. נניח שהטענה נכונה עבור $a-1$:

$$\left(a-1\right)\left\langle u,v\right\rangle=\left\langle\left(1-a\right)u,v\right\rangle$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור a:

$$\langle au,v\rangle=\left\langle\left(a-1+1\right)u,v\right\rangle=\left\langle\left(a-1\right)u,v\right\rangle+\langle1\cdot u,v\rangle=$$

ולפי הנחת האינדקוציה:

$$=\left(a-1\right)\left\langle u,v\right\rangle+\left\langle u,v\right\rangle=a\left\langle u,v\right\rangle$$

ii. עבור $a=0$ הטענה טריוויאלית:

$$\langle0u,v\rangle=\langle0,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\left\|v+0\right\|^{2}-\left\|v-0\right\|^{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\left\|v\right\|^{2}-\left\|v\right\|^{2}\right)=0=0\left\langle u,v\right\rangle$$

iii. עבור $a\in\mathbb{Z}$ שלילי, מסעיף א' אנו יודעים:

$$\left\langle\left(-a\right)u,v\right\rangle=\left(-a\right)\left\langle u,v\right\rangle=-a\left\langle u,v\right\rangle$$

בעזרת אדיטיביות וסעיף ב':

$$\langle au,v\rangle+\left\langle\left(-a\right)u,v\right\rangle=\left\langle\left(a+\left(-a\right)\right)u,v\right\rangle=\langle0u,v\rangle=0$$

ולכן גם $\langle (-a)\, u, v\rangle = -\langle au, v\rangle$ ומכאן:

$$\langle -au, v\rangle = -a\,\langle u, v\rangle$$

נכפיל את שני האגפים ב$-1-$ וסיימנו.

iv. עבור $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, כאשר $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, מתקיים $m = na$. מהסעיפים הקודמים:

$$n\,\langle au, v\rangle = \langle nau, v\rangle = \langle mu, v\rangle = m\,\langle u, v\rangle = na\,\langle u, v\rangle$$

נצמצם ב$-n$ וסיימנו.

v. עבור $a \in \mathbb{R}$ כללי, ניקח סדרה $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ששואפת ל$-a$. לפיכך: $a_n - a \to 0$ ולכן:

$$\|(a_n - a)\, u\| = |a - a_n| \cdot \|u\| \to 0$$

כמו כן, $(a_n - a)\, u = (a_n u \pm w) - (au \pm w)$ ולכן גם:

$$\|au \pm w\| - \|a_n u \pm w\| \to 0$$

לפי שאלה 1. לכן:

$$\langle au, w\rangle - \langle a_n u, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|au + w\| - \|a_n u + w\| - \|au - w\| + \|a_n u - w\|\right) \to 0$$

כלומר $\langle a_n u, w\rangle \to \langle au, w\rangle$. ברור ש: $a_n\,\langle u, w\rangle \to a\,\langle u, w\rangle$. מהסעיף הקודם, ואם כן:

$$\langle a_n u, w\rangle = a_n\,\langle u, w\rangle$$

ולכן לפי יחידות הגבול:

$$\langle au, w\rangle = a\,\langle u, w\rangle$$

והוכחנו שמולטיפלטיביות מתקיימת. בסך הכל הוכחנו את הדרוש.

2 מרחבים מטריים

הגדרה 2.1 תהי A קבוצה. פונקציה $d:A\times A\to\mathbb{R}$ נקראת **מטריקה על** A אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. אי־שליליות:

   (א) $d(x,y)\geq 0$ לכל $x,y\in A$.

   (ב) $x=y\iff d(x,y)=0$.

2. סימטריות:

   $d(x,y)=d(y,x)$ לכל $x,y\in A$.

3. אי־שוויון המשולש:

   $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ לכל $x,y,z\in A$.

אינטואיטיבית, מטריקה מגדירה מרחק בקבוצה. קבוצה עליה מוגדרת מטריקה נקראת **מרחב מטרי,** ונסמן: (A,d).

דוגמאות:

1. כל נורמה משרה מטריקה, על ידי:

$$d\left(x,y\right)=\left\Vert x-y\right\Vert$$

   אם לא מצוין במפורש אחרת, כאשר נתייחס אל $\mathbb{R}^{n}$ כאל מרחב מטרי נתכוון ל**מטריקה הסטנדרטית,** המטריקה אותה משרה הנורמה הסטנדרטית (האוקלידית).

2. מעל $\mathbb{R}^{+}$, הפונקציה $d(x,y)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|$ היא מטריקה.

3. מעל מרחב נורמי V, הפונקציה:

$$d(x,y)=\begin{cases}\left\Vert x\right\Vert+\left\Vert y\right\Vert & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

   היא מטריקה. מטריקה זו מכונה "מטריקת המסילה הבריטית" או "מטריקת משרד הדואר".

רכבת בריטית באיזור מנצ'סטר.

4. מעל קבוצה (לא ריקה...) כלשהי, הפונקציה:

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

היא מטריקה. מטריקה זו נקראת **המטריקה הדיסקרטית.**

5. מעל מרחב המטריצות $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, הפונקציה $d(X,Y)=rank\,(Y-X)$ היא מטריקה.

<u>תרגיל:</u>

יהי $a\in\mathbb{N}$, $a\neq 1$. נגדיר פונקציה $d_a:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$d_a(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{a^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$

כאשר: $k(x,y)=max\{i:a^i|(x-y)\}$. הוכיחו שזו מטריקה.

<u>פתרון:</u>

קל לראות שתכונות החיוביות והסימטריות מתקיימות. נראה שאי־שוויון המשולש אכן מתקיים.

יהיו $x,y,z\in\mathbb{Z}$ שאינם שווים זה לזה (אחרת זה ברור). נסמן: $m=\min\{k(x,y),k(y,z)\}$.
מתקיים:

$$a^m|x-y, a^m|y-z \longrightarrow a^m|(x-y)-(y-z) \longrightarrow a^m|(x-z) \longrightarrow m\leq k(x,z)$$

ולכן:

$$d(x,z)=\frac{1}{a^{k(x,z)}}\leq\frac{1}{a^m}=\max\left\{\frac{1}{a^{k(x,y)}},\frac{1}{a^{k(y,z)}}\right\}=\max\{d(x,y),d(y,z)\}\leq d(x,y)+d(y,z)$$

לכן א"ש המשולש מתקיים, וזו מטריקה.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציות הבאות מטריקות על $A\times A$ כאשר A מרחב מטרי עם מטריקה d?

1. $D_1\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right)=\min\left\{d\left(x,x_1\right),d\left(y,y_1\right)\right\}$?

לא!

$$D_1\left(\left(1,3\right),\left(1,4\right)\right)=0$$

אך:

$$\left(1,3\right)\neq\left(1,4\right)$$

לכן תכונת החיוביות לא מתקיימת וזו אינה מטריקה.

2. $D_2\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right)=|x|+|y|+|x_1|+|y_1|$?

לא!

$$D_2\left(\left(1,1\right),\left(1,1\right)\right)=4\neq0$$

לכן תכונת החיוביות לא מתקיימת, וזו אינה מטריקה.

3. $D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right)=d\left(x,x_1\right)+d\left(y,y_1\right)$?

זו אכן מטריקה. d אי־שלילית ולכן גם D_3 אי־שלילית ובנוסף:

$$D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right)=0\iff d\left(x,x_1\right)+d\left(y,y_1\right)=0$$

$$\iff d\left(x,x_1\right),d\left(y,y_1\right)=0\iff x=x_1,y=y_1\iff\left(x,y\right)=\left(x_1,y_1\right)$$

ולכן D_3 חיובית.

D_3 סימטרית כי d סימטרית. כעת, נזכור ש־$d-$ מטריקה ולכן מקיימת את א"ש המשולש, ולכן:

$$D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_2,y_2\right)\right)=d\left(x,x_2\right)+d\left(y,y_2\right)\leq d\left(x,x_1\right)+d\left(x_1,x_2\right)+d\left(y,y_1\right)+d\left(y_1,y_2\right)$$

$$=D_3\left(\left(x,y\right),\left(x_1,y_1\right)\right)+D_3\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)$$

הגדרה 2.2 תהי A קבוצה ותהי d מטריקה על A. יהיו $a\in A$ ו־$r>0$.

1. הקבוצה $B\left(a,r\right)=\left\{x\in A|d\left(x,a\right)<r\right\}$ נקראת **כדור פתוח** (עם מרכז a ורדיוס r).
2. הקבוצה $B\left[a,r\right]=\left\{x\in A|d\left(x,a\right)\leq r\right\}$ נקראת **כדור סגור.**

<u>תרגיל:</u>

יהיו $x_1,x_2\in\left(X,d\right)$, $r_1,r_2>0$ ויהיו $B\left(x_1,r_1\right),B\left(x_2,r_2\right)$ כך ש: $B\left(x_1,r_1\right)\cap B\left(x_2,r_2\right)\neq\phi$. תהי $p\in B\left(x_1,r_1\right)\cap B\left(x_2,r_2\right)$ ונסמן:

$$r=\min\left\{r_1-d\left(p,x_1\right),r_2-d\left(p,x_2\right)\right\}$$

הוכיחו ש: $B(p,r)\subseteq B\left(x_1,r_1\right)\cap B\left(x_2,r_2\right)$.

<u>פתרון:</u>

נוכיח קודם טענת עזר: תהי $p \in B(x,r)$ כך ש: $0 < r < R - d(x,p)$ אזי: $B(p,r) \subseteq B(x,R)$.

יהי $y \in B(p,r)$ אזי $r > d(p,y)$. כעת:

$$d(y,x) \leq d(y,p) + d(p,x) < r + d(p,x) \leq R$$

ולכן: $y \in B(x,R)$. לכן $B(p,r) \subseteq B(x,R)$.

כעת, מכיוון ש־ $p \in B(x_1,r_1)$ ומטענת העזר נקבל שמתקיים: $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1)$ (כאשר: $x = x_1, r = r_1$). באופן דומה: $B(p,r) \subseteq B(x_2,r_2)$ ולכן:

$$B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$$

כלומר, כאשר כדורים פתוחים נחתכים באופן לא ריק, אפשר למצוא כדור פתוח המוכל בחיתוך.

הגדרה 2.3 תהי A קבוצה ותהי d מטריקה עליה.

1. קבוצה $U \subseteq A$ נקראת **פתוחה**, אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש: $B(x,r) \subseteq U$.
2. קבוצה $S \subseteq A$ נקראת **סגורה**, אם הקבוצה S^c פתוחה.
3. קבוצה שהיא גם סגורה וגם פתוחה מכונה (בהלחם־בסיסים נפלא) קבוצה **סגוחה** ($clopen$).

<u>דוגמאות בסיסיות:</u>

1. בכל מרחב מטרי (A,d), הקבוצות A, ϕ הן קבוצות פתוחות וסגורות.
2. בכל מרחב מטרי, כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה וכדור סגור הוא קבוצה סגורה (ללא תלות במרכז וברדיוס).
3. במטריקה הדיסקרטית, כל קבוצה היא פתוחה ולכן גם כל קבוצה היא סגורה.

4. ב$-\mathbb{R}$, קטעים פתוחים הם קבוצות פתוחות ולא סגורות וקטעים סגורים הם קבוצות סגורות ולא פתוחות.

5. ב$-\mathbb{R}$, קטעים חצי־פתוחים חצי־סגורים, למשל $[2,5)$, הם קבוצות לא פתוחות ולא סגורות.

<u>תרגיל:</u>

האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות?

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לא פתוחה, כי בכל כדור פתוח עם מרכז רציונלי יש נקודות אי־רציונליות. באופן דומה המשלים אינה פתוחה (בכל כדור פתוח עם מרכז אי־רציונלי יש נקודות רציונליות) ולכן לא סגורה.

2. $\{x\}$בתוך $\mathbb{R}$ עבור $x \in \mathbb{R}$.

לא פתוחה, לכל $r > 0$, $B(x,r) \nsubseteq \{x\}$. לכל $y \in \{x\}^c$ מתקיים:
$B\left(y, \frac{|x-y|}{2}\right) \subseteq \{x\}^c$ לכן המשלים פתוחה ולכן $\{x\}$ סגורה.

משפט 2.4 יהי (A,d) מרחב מטרי. אזי:

1. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$אוסף של קבוצות פתוחות, אז גם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ קבוצה פתוחה.
2. אם $\{U_i\}_{i=1}^n$ אוסף סופי של קבוצות פתוחות, אז גם $\bigcap_{i=1}^n U_i$ קבוצה פתוחה.

מסקנה 2.5 בעזרת דה־מורגן נסיק:

1. אם $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של קבוצות סגורות, אז גם $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ קבוצה סגורה.
2. אם $\{S_i\}_{i=1}^n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות, אז גם $\bigcup_{i=1}^n S_i$ קבוצה סגורה.

הגדרה 2.6 יהי (A,d) מרחב מטרי ותהי $x \in A$. x נקראת **נקודת הצטברות של** A אם לכל $r > 0$ קיים $y \in A$ כך ש$-$ $y \in B(x,r)$ ו$-$ $y \neq x$.

במקרה של מרחבים מטריים, כל נקודת הצטברות היא גם **נקודת גבול** (בהמשך נגדיר התכנסות במרחבים מטריים). עם זאת, באופן כללי המושגים לאו דווקא חופפים; תראו זאת בקורס בטופולוגיה.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את קבוצת נקודות ההצטברות של הקבוצות הבאות:

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $r > 0$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש: $q \in B\left(x, r\right)$ ולכן קבוצת נקודות ההצטברות היא כל $\mathbb{R}$.

2. הקטע $(0, 1)$ בתוך $\mathbb{R}$.

לכל $x \in [0, 1]$ נסמן: $r = \frac{1}{2} \min\left\{|x|, |1 - x|\right\}$ ואז הכדור $B(x, r)$ מוכל כולו בקטע $(0, 1)$. עם אותו r נקבל שכל $x \notin [0, 1]$ אינו נקודת הצטברות, ולכן סה"כ מדובר על $[0, 1]$.

משפט 2.7 יהי (A, d) מרחב מטרי ותהי $S \subset A$. נסמן ב-S' את קבוצת נקודות ההצטברות של S.

1. S סגורה אם ורק אם $S' \subseteq S$.

2. אם S פתוחה, $S \subseteq S'$.

לפיכך, בבואנו לבדוק האם קבוצה היא סגורה או לא, נוכל לבדוק האם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

הגדרה 2.8 יהי (A, d) מרחב מטרי. נאמר שקבוצה $B \subseteq A$ היא **חסומה**, אם לכל נקודה $x_0 \in B$ קיים $r > 0$ עבורו $B \subseteq B\left(x_0, r\right)$.

תנאי שקול לכך הוא שקיימת נקודה x_0 וקיים $r > 0$ עבורם:

$$B \subseteq B\left(x_0, r\right)$$

מן הסתם, בעזרת התנאי השקול נוח יותר להראות שקבוצה היא אכן חסומה, בעוד שבעזרת ההגדרה המקורית נוח להראות שקבוצה אינה חסומה.

<u>תרגיל:</u>

האם הקבוצות הבאות חסומות?

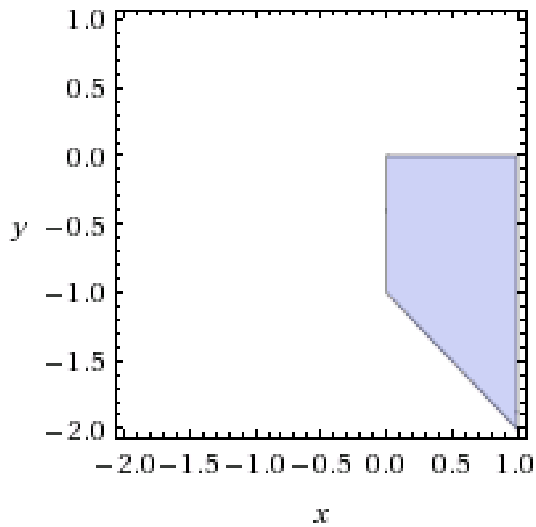
1. $A = \left\{(x, y)\,|y = 0, x \in (0, 1)\right\}$ ב-$\mathbb{R}^2$.

זהו הקטע $(0,1)$על ציר ה$-x$ במישור. הקבוצה חסומה; הכדור $B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),2\right)$ מכיל אותה.

2. $B=\{(x,y)\,|x=y\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

הקבוצה אינה חסומה - לכל $r>0$, הנקודה $(3r,3r)$ נמצאת בקבוצה אך לא נמצאת בכדור $B\left((0,0),r\right)$.

3. $C=\{(x,y)\,|x>0,y<0,x+y>-1\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.



הקבוצה אינה חסומה, כי לכל $r>0$, הנקודה $(1+10r,-1-10r)$ נמצאת בקבוצה אך לא נמצאת בכדור $B\left((1,-1),r\right)$.

משפט 2.9 בולצאנו ויירשטראס:

תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אינסופית וחסומה. אזי, קיימת ל$-A$ נקודת הצטברות.

הגדרה 2.10 יהי A מרחב מטרי ותהי $B\subseteq A$ קבוצה.

1. נאמר שאוסף של תת־קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא **כיסוי פתוח** של B, אם כל $A_\alpha\subseteq A$ היא פתוחה, ומתקיים:

$$B\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$$

2. **תת־כיסוי** הוא תת־קבוצה של כיסוי.

3. קבוצה $K \subseteq A$ נקראת **קומפקטית**, אם לכל כיסוי פתוח שלה קיים תת־כיסוי סופי.

כה אמרה ויקיפדיה:

"אינטואיטיבית, ניתן להבין את מושג הקומפקטיות כיכולת למדוד קבוצה בעזרת קבוצות פתוחות. על מנת שקבוצה תהיה ניתנת למדידה ,צריך לכסות אותה בעזרת מספר סופי של בדידים בדיוק כמו שמודדים מרחק ע"י חישוב מספר הבדידים באורך מטר שנכנסים בתוך הקטע הנמדד. לכל כיסוי יש אין סוף בדידים או קבוצות פתוחות, על מנת להצליח למדוד את הקבוצה עלינו לבחור מתוכם מספר סופי של בדידים ולכסות את הקבוצה. יכולת המדידה נבחנת ביכולת לכסות את הקבוצה לכל אין סוף סוגים של בדידים נתונים במספר סופי של בדידים".

משפט 2.11 היינה־בורל:

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A קומפקטית $\iff$ A סגורה וחסומה.

באופן כללי, במרחב מטרי קבוצה קומפקטית היא סגורה וחסומה. משפט היינה־בורל נותן לנו את הכיוון השני ב־$\mathbb{R}^n$.

במרחבים כלליים, אין קשר הכרחי בין הדברים; תראו זאת בקורס בטופולוגיה.

<u>תרגיל:</u>

תהיינה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קבוצות קומפקטיות במרחב $\mathbb{R}^m$. האם הקבוצות הבאות קומפקטיות?

1. $A_1 \cup A_2$.
2. $A_1 \cap A_2$.
3. $A_1 \backslash A_2$.
4. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

<u>פתרון</u>

הקבוצות שלנו קומפקטיות ולכן כולן סגורות וחסומות.

1. כן. איחוד סופי של סגורות הוא קבוצה סגורה, ואיחוד סופי של קבוצות חסומות הוא קבוצה חסומה; אם $B(0,r_1) \supseteq A_1, B(0,r_2) \supseteq A_2$ אז $A_1 \cup A_2 \subseteq B(0,r_1+r_2)$.

2. כן. באופן דומה לאיחוד.

3. לא בהכרח. נתבונן למשל בקבוצות: $A_1 = [0,2]\,, A_2 = [0,1]$. הן סגורות וחסומות ולכן, לפי היינה־בורל, קומפקטיות. עם זאת, הקבוצה $A_1 \backslash A_2 = [0,1)$ אינה סגורה ולכן אינה קומפקטית.

4. לא בהכרח. נתבונן למשל בקבוצות $A_n = \{n\}$. הן סגורות וחסומות ולכן (לפי היינה־בורל) קומפקטיות, אך $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ לא חסומה ולכן לא קומפקטית.

משפט 2.12 תהי A קבוצה קומפקטית ותהי $B \subseteq A$ סגורה. אזי B קומפקטית.

הגדרה 2.13 יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$.

1. **הסגור** של A מוגדר על ידי:

$$cl\,(A) = \bigcap_{A\subseteq S} S$$

כאשר S קבוצה סגורה.

2. **הפנים** של A מוגדר על ידי:

$$int\,(A) = \bigcup_{A\subseteq V} V$$

כאשר V קבוצה פתוחה.

הסגור הוא חיתוך של קבוצות סגורות ולכן הוא קבוצה סגורה. הסגור הוא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את הקבוצה. באופן דומה, הפנים הוא איחוד של קבוצות פתוחות ולכן הוא קבוצה פתוחה. הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת בקבוצה.

אם כך, מתקיים:

$$cl\,(cl\,(A)) = cl\,(A)\,, int\,(int\,(A)) = int\,(A)$$

לכל A.

משפט 2.14 נסמן ב־A' את אוסף נקודות ההצטברות של A. אזי:

$$cl\left(A\right)=A\cup A'$$

<u>תרגיל:</u>

יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$. אזי, $cl\left(A\right)=\left(int\left(A^{c}\right)\right)^{c}$.

<u>פתרון:</u>

ממש מההגדרה,

$$cl\left(A\right)=\bigcap_{A\subseteq S}S=\left(\bigcup_{S^{c}\subseteq A^{c}}S^{c}\right)^{c}=\left(int\left(A^{c}\right)\right)^{c}$$

במעבר השני השתמשנו בדה־מורגן. מכיוון ש־S סגורה, S^{c} פתוחה; מכיוון ש־$A\subseteq S$ אז $S^{c}\subseteq A^{c}$.

מסקנה 2.15 מהתרגיל, נקבל:

1. $\left(int\left(A\right)\right)^{c}=cl\left(A^{c}\right)$.
2. $int\left(A^{c}\right)=\left(cl\left(A\right)\right)^{c}$.

הגדרה 2.16 יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$ קבוצה. **השפה** של A מוגדרת על ידי:

$$\partial A=cl\left(A\right)\backslash int\left(A\right)$$

אינטואיטיבית, השפה היא כל הנקודות שנמצאות ב"קצוות" הקבוצה.

הגדרה 2.17 יהי X מרחב מטרי, ותהי $A\subseteq X$ קבוצה. נאמר ש־A **קשירה**, אם היא לא מוכלת באיחוד $U\cup V$ כאשר U,V פתוחות וזרות עבורן: $A\cap V\neq\emptyset,B\cap V\neq\emptyset$.

<u>לדוגמה:</u>

ב־$\mathbb{R}^n$, כדורים פתוחים, כדורים סגורים וקוביות הם קבוצות קשירות.

אינטואיטיבית, אי־אפשר לפרק את הקבוצה לשתי קבוצות פתוחות.

<u>תרגיל:</u>

יהי X מרחב מטרי ותהיינה A,B קשירות. האם הקבוצות הבאות קשירות?

1. $A\cup B$.
2. $A\cap B$.
3. $A\backslash B$.

<u>פתרון:</u>

1. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות $A=(0,2)\,,B=(3,4)$ ב־$\mathbb{R}$. הקבוצות קשירות (אלו כדורים פתוחים) אך האיחוד שלהן לא קבוצה קשירה; (הקבוצות $A=U,B=V$ מכסות אותו).

2. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות:

$$A=\{(x,y)|0\le y\le 1,0\le x\le 3\}\cup\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 3\}$$

$$B=\{(x,y)|2\le y\le 3,0\le x\le 3\}\cup\{(x,y)|2\le x\le 3,0\le y\le 3\}$$

ב־$\mathbb{R}^2$. כל אחת מהן קשירה, אך החיתוך אינו קבוצה קשירה.

3. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות $A=(0,3)\,,B=(1,2)$ ב־$\mathbb{R}$. הקבוצות קשירות אך ההפרש אינו קבוצה קשירה.

משפט 2.18 יהי X מרחב מטרי ותהיינה $A,B\subseteq X$ קשירות. נניח ש־$A\cap B\neq\emptyset$, אזי $A\cup B$ קשירה.

הגדרה 2.19 יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$. נאמר שהקבוצה A **קשירה מסילתית**, אם לכל $a,b\in A$ קיימת פונקציה רציפה $\gamma:[0,1]\to A$ עבורה $\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$. פונקציה כזו מכונה **מסילה**.

אינטואיטיבית, קבוצה היא קשירה מסילתית אם אפשר בין כל שתי נקודות בקבוצה לצייר קו (לאו דווקא ישר) שנמצא כולו בקבוצה.

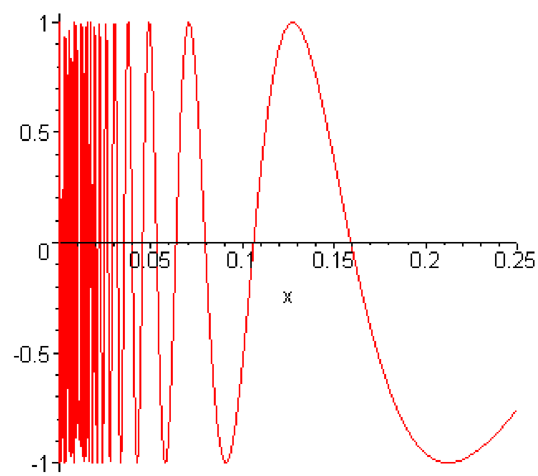
משפט 2.20 יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$. אם A קשירה מסילתית אז A קשירה.

ההיפך לא נכון!

דוגמה מפורסמת היא "עקומת הסינוס של הטופולוגים" (חפשו בגוגל), הקבוצה:

$$\left\{\left(x, sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

כלומר הצד החיובי של גרף הפונקציה $sin\left(\frac{1}{x}\right)$ והחלק בין 1- ו-1 על ציר ה$-y$.



משפט 2.21 יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ פתוחה. אזי, A קשירה מסילתית אם"ם A קשירה.

הגדרה 2.22 יהי (X,d) מרחב מטרי.

1. נאמר שסדרה $X \supseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **מתכנסת** ל$-x$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n_0 < n$ מתקיים:

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

כלומר, $x_n \in B\left(x,\varepsilon\right)$. x נקראת **נקודת גבול.** אכן, כמו שהזכרנו, במרחבים מטריים נקודת גבול היא נקודת הצטברות ולהיפך.

2. נאמר שסדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ היא **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n,m > n_0$,

$$d\left(x_n,x_m\right) < \varepsilon$$

אינטואיטיבית, האיברים מצטופפים יותר ויותר ככל שמתקדמים במעלה הסדרה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו כי הסדרה $a_n = (\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n})$ היא סדרת קושי.

<u>פתרון:</u>

יהיו m,n. נחשב:

$$||a_n - a_m|| = \sqrt{2}\cdot(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}) < \sqrt{2}\cdot(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^m})$$

יהי $\varepsilon > 0$, צ"ל $||a_n - a_m|| < \varepsilon$. אנו רוצים למצוא את n_0 המתאים.

מספיק להבטיח שמתקיים:

$$\sqrt{2}\cdot(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^m}) < \varepsilon$$

ומספיק שיתקיים: $\sqrt{2}\frac{1}{2^n}, \sqrt{2}\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן נדרוש:

$$m,n > log_2(\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon})$$

ואם נבחר: $n_0 = max\{1, log_2(\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon})\}$ נקבל את הדרוש.

משפט 2.23 כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

<u>לדוגמה:</u>

ההיפך לאו דווקא נכון.

אפשר לבחור סדרה שאנו יודעים שהיא "מתכנסת", ולכן גם סדרת קושי לפי המשפט, אך "מתכנסת" לאיבר שאינו נמצא במרחב - ולכן כלל לא מתכנסת.

למשל, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ במרחב $(0,1]$. זוהי סדרת קושי (כי היא "מתכנסת" ל-0) אך אבוי! היא אינה מתכנסת במרחב שלנו.

הגדרה 2.24 מרחב מטרי נקרא **שלם** אם כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

מרחב נורמי נקרא **מרחב בנך** אם הוא שלם לפי המטריקה המושרית מהנורמה.

מרחב מכפלה פנימית נקרא **מרחב הילברט** אם הוא שלם לפי המטריקה המושרית מהמכפלה הפנימית.

<u>לדוגמה:</u>

1. המרחבים $\mathbb{R}^k$ הם שלמים.
2. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.
3. כל תת־קבוצה סגורה של מרחב שלם היא מרחב שלם.

סדרות קושי אמנם לא בהכרח מתכנסות, אך הן "דומות" לסדרות מתכנסות ומקיימות מספר תכונות נאות. בתרגיל הבא (ובתרגילים הנוספים) נוכיח כמה מהן.

<u>תרגיל:</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ סדרת קושי. הראו שהיא חסומה.

<u>פתרון:</u>

מכיוון שזו סדרת קושי, קיים n_1 עבורו לכל $m,n>n_1$, $d\left(x_n,x_m\right)<1$.

נגדיר:

$$r=1+\max_{1\le n,m\le n_1+1} d\left(x_n,x_m\right)$$

r אכן מוגדר מכיוון שהמקסימום הוא על קבוצה סופית.

מהגדרת r נקבל שלכל n,m, $d\left(x_n,x_m\right)<r$, ובפרט עבור m מסוים נקבל שלכל n,

$$d\left(x_n,x_m\right)<r\Longrightarrow x_n\in B\left(x_m,r\right)$$

ולכן הסדרה חסומה.

תרגילים נוספים

1. הוכיחו שהפונקציות הבאות הן מטריקות על המרחבים הנתונים:

(א) ב$-\mathbb{R}^{+}$, $d(x,y)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|$.

(ב) במרחב נורמי V, $d(x,y)=\|x\|+\|y\|$ כאשר $x\neq y$, ו$-d(x,y)=0$ כאשר $x=y$.

(ג) בקבוצה X, $d(x,y)=1$ כאשר $x\neq y$ ו$-d(x,y)=0$ כאשר $x=y$.

(ד) במרחב מטריצות $M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, $d\left(X,Y\right)=rank\left(X-Y\right)$.

2. נסמן ב$-A'$ את אוסף נקודות ההצטברות של A. יהי $X=\mathbb{R}$. תהי $A=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. מהן A',A''?

3. האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות?

(א) $A=\left\{(x,y)\,|y=0,x\in(0,1)\right\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

(ב) $B=\left\{(x,y)\,|x=y\right\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

(ג) $C=\left\{(x,y)\,|x>0,y<0,x+y>-1\right\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

4. האם הקבוצות הבאות פתוחות ב$-\mathbb{R}^2$? סגורות? מצאו את קבוצת נקודות הגבול.

(א) $A=\left\{(0,1)\,,(0,0)\right\}$.

(ב) $B=\left\{(x,y)\,|x^2+y^2<1\right\}\cup\left\{(0,1)\right\}$.

(ג) $C=\left\{(x,y)\,|x>0,y<0\right\}$.

5. בכל אחד מהסעיפים הבאים, תנו דוגמה למרחב מטרי וקבוצות מתאימות.

(א) איחוד של קבוצות סגורות שאינו קבוצה סגורה.

(ב) חיתוך של קבוצות פתוחות שאינו קבוצה פתוחה.

(ג) קבוצה סגורה וחסומה שאינה קומפקטית.

6. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה חסומה ב־$\mathbb{R}^n$. נניח שהסדרה $\{d_2(x_n,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (המטריקה האוקלידית) עולה ממש. האם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת?

7. תהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, ויהי $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות סגורות שאיחודן הוא X. נניח שלכל אוסף סופי $\{A_{i_k}\}_{k=1}^m$ מתקיים: $\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}\neq\emptyset$. הוכיחו:

$$\bigcap_{i\in I} A_i\neq\emptyset$$

8. יהי X מרחב מטרי, ותהיינה $A,B\subseteq X$. הוכיחו או הפריכו:

(א) $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

(ב) $cl(A\cap B)\supseteq cl(A)\cap cl(B)$.

(ג) $int(A\cup B)\subseteq int(A)\cup int(B)$.

(ד) $int(A\cup B)\supseteq int(A)\cup int(B)$.

9. יהי X מרחב מטרי. יהי $a\in X$ ויהי $r>0$.

(א) הוכיחו שאם X מרחב נורמי, אזי $cl(B(a,r))=B[a,r]$.

(ב) מצאו דוגמה נגדית למקרה בו X אינו מרחב נורמי.

10. יהי X מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$. האם $cl(int(A))=cl(A)$?

11. יהי X מרחב מטרי. ותהיינה $A,B\subseteq X$ קבוצות קשירות.

(א) האם $int(A)$ קשירה?

(ב) נניח ש־$A\cap B\neq\emptyset$. האם $int(A\cup B)$ קשירה?

12. הוכיחו או הפריכו: אם $A\subseteq\mathbb{R}^2$ בת מניה, אז $\mathbb{R}^2\backslash A$ קשירה מסילתית.

13. תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$, ונסמן את קבוצות נקודות הגבול שלהן ב־$\lim A,\lim B$ בהתאמה. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\lim A\cap\lim B=\lim\left(A\cap B\right)$.

(ב) $\lim A\cup\lim B=\lim\left(A\cup B\right)$.

(ג) $\lim A\times\lim B=\lim\left(A\times B\right)$.

(ד) $\lim A\backslash\lim B=\lim\left(A\backslash B\right)$.

14. הוכיחו שהמרחבים הבאים הם שלמים:

(א) $C\left[a,b\right]$ עם הנורמה $\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|$.

(ב) $l_2=\left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\right\}$ עם הנורמה $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}$.

15. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

(א) הראו שאם לסדרה יש גבול חלקי (גבול של תת־סדרה), זהו הגבול של הסדרה.

(ב) הסיקו שמרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב שלם.

16. יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר את **הקוטר** של תת־קבוצה $A\subseteq X$ על ידי:

$$\delta\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)|x,y\in A\right\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות $X\supseteq\cdots\supseteq F_n\supseteq F_{n+1}\supseteq\cdots$ המקיימת $\delta\left(F_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$.

פתרונות

1. בכל אחד מהסעיפים נראה שתכונות המטריקה מתקיימות.

(א) $d\left(x,y\right)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|$.

i. אי־שליליות: מכיוון שזהו ערך מוחלט, $d\left(x,y\right)\geq0$. כמו כן:

$$x=y\iff\frac{y}{x}=1\iff\left|\ln\frac{y}{x}\right|=0\iff d\left(x,y\right)=0.$$

ii. סימטריות: נשתמש בחוקי הלוגריתם:

$$d\left(x,y\right)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|=\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\right|=\left|\left(-1\right)\cdot\ln\frac{x}{y}\right|=\left|\ln\frac{x}{y}\right|=d\left(y,x\right).$$

iii. אי־שוויון המשולש: שוב, נשתמש בחוקי הלוגריתם:

$$d\left(x,z\right)=\left|\ln\frac{z}{x}\right|=\left|\ln\frac{\frac{z}{y}}{\frac{x}{y}}\right|=\left|\ln\frac{z}{y}-\ln\frac{x}{y}\right|=\left|\ln\frac{y}{x}+\ln\frac{z}{y}\right|$$

בעזרת אי־שוויון המשולש של ערך מוחלט:

$$\left|\ln\frac{y}{x}+\ln\frac{z}{y}\right|\leq\left|\ln\frac{z}{y}\right|+\left|\ln\frac{y}{x}\right|=d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$$

(ב) $$d(x,y)=\begin{cases}\|x\|+\|y\| & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}.$$

i. אי־שליליות: נובעת מאי־השליליות של הנורמה.

ii. סימטריות: נובעת מהחילופיות של החיבור.

iii. אי־שוויון המשולש: נובע גם הוא מתכונות הנורמה:

$$d\left(x,z\right)=\|x\|+\|z\|\leq\|x\|+2\left\|y\right\|+\|z\|=d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$$

(ג) $$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}.$$

i. אי־שליליות: ישירות מהגדרת המטריקה.

ii. סימטריות: כנ"ל.

iii. אי־שוויון המשולש: גם הוא מיידי.

(ד) $d(X,Y)=rank\left(Y-X\right)$.

i. אי־שליליות: לכל מטריצה A, $rank\left(A\right)\geq0$. כמו כן:

$$d\left(X-Y\right)=0\iff rank\left(Y-X\right)=0\iff Y-X=0\iff X=Y.$$

שימו לב שמדובר על אפסים שונים, פעם סקלר ממשי ופעם מטריצת האפס.

ii. סימטריות:

$$d(X,Y)=rank\left(Y-X\right)=rank\left(\left(-1\right)\cdot\left(X-Y\right)\right)=rank\left(X-Y\right)=$$

.$d\left(Y,X\right)$

מכיוון שכפל בסקלר שונה מאפס לא משנה את דרגתה של המטריצה.

iii. אי־שוויון המשולש:

$$d\left(X,Z\right)=rank\left(Z-X\right)=rank\left(\left(X-Y\right)+\left(Y-Z\right)\right)\leq$$

מטענה שראיתם בוודאי שאלגברה ליניארית:

$$\leq rank\left(Y-X\right)+rank\left(Z-Y\right)=d\left(X,Y\right)+d\left(Y,Z\right)$$

2. $0\in A'$ כי $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

מצד שני, אם ניקח סדרה $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ אפשר לסדר אותה כתת סדרה של $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ולכן נקודת הגבול היחידה היא 0 וסה"כ $A'=\left\{0\right\}$.

לכן, $A''=\phi$.

אפשר כמובן להסתכל על נקודת ההצטברות לפי ההגדרה, ולראות שלמעט 0 את כל הנקודות בקבוצה אפשר להקיף בכדור מספיק קטן שאין לו חיתוך עם הקבוצה (למעט המרכז כמובן).

3. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה אינה פתוחה, מכיוון שעבור $\left(\frac{1}{2},0\right)\in A$, לכל $r>0$ מתקיים: $B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),r\right)\nsubseteq A$.

הקבוצה אינה סגורה, כי המשלים אינו קבוצה פתוחה; לכל $r>0$, מתקיים $B\left(\left(1,0\right),r\right)\nsubseteq A^c$.

(ב) הקבוצה אינה פתוחה, כי עבור $\left(1,1\right)\in B$, לכל $r>0$ מתקיים: $B\left(\left(1,1\right),r\right)\subsetneq B$.

הקבוצה סגורה, מכיוון שהמשלים פתוחה; לכל נקודה $\left(x,y\right)\in B^c$ נסמן את מרחקה מהישר $y=x$ ב־D ואז $B\left(\left(x,y\right),\frac{D}{2}\right)\subseteq B^c$.

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $\left(x,y\right)\in C$ נסמן את מרחקה מהישר $x+y+1=0$ ב־D, ונסמן: $r=\frac{1}{2}\min\left\{\left|x\right|,\left|y\right|,D\right\}$ ונקבל ש: $B\left(\left(x,y\right),r\right)\subseteq C$.

הקבוצה לא סגורה, כי המשלים אינה פתוחה; עבור $\left(0,0\right)\in C^c$, לכל $r>0$ $B\left(\left(0,0\right),r\right)\subsetneq C^c$ ולכן אינה פתוחה.

4. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r>0$, $B\left(\left(0,0\right),r\right)\subsetneq A$.

הקבוצה סגורה; כל נקודון הוא סגור ואיחוד סופי של סגורות הוא סגור.

האופציות היחידות לנקודות גבול הן $\left(0,1\right),\left(0,0\right)$ כי A סגורה, אך $B\left(\left(0,1\right),\frac{1}{2}\right),B\left(\left(0,0\right),\frac{1}{2}\right)$ זרים ל$-A$ (למעט מרכזיהם) ולכן אלו לא נקודות גבול.

לכן לקבוצה אין נקודות גבול.

(ב) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r>0$, $B\left(\left(0,1\right),r\right)\nsubseteq B$.

הקבוצה לא סגורה, מכיוון שמשלימתה אינה פתוחה; $\left(1,0\right)\in B^{c}$ אך לכל $r>0$, $B\left(\left(1,0\right),r\right)\nsubseteq B^{c}$.

הקבוצה $\left\{ \left(x,y\right)|x^{2}+y^{2}<1\right\}$ היא כדור פתוח, לכן פתוחה ולכן כל הנקודות בה הן נקודות גבול.

גם נקודות הקבוצה $\left\{ \left(x,y\right)|x^{2}+y^{2}=1\right\}$ הן נקודות גבול, כי לכל $\left(x,y\right)\in\left\{ \left(x,y\right)|x^{2}+y^{2}=1\right\}$ ולכל $r>0$ אפשר לקחת $r'=\min\left\{ 1,r\right\}$ ואז:

$$\left(\left(1-\frac{r'}{2}\right)x,\left(1-\frac{r'}{2}\right)y\right)\in B\cap B\left(\left(x,y\right),r\right)$$

כל נקודה $\left(x,y\right)$ אחרת אינה נקודת גבול (נסמן את מרחקה מהמעגל $\left\{ \left(x,y\right)|x^{2}+y^{2}=1\right\}$ ב$-D$ ואז הכדור $B\left(\left(x,y\right),\frac{D}{2}\right)$ זר ל$-B$), ולכן קבוצת נקודות הגבול היא

$$\left\{ \left(x,y\right)|x^{2}+y^{2}\leq1\right\}$$

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $\left(x,y\right)\in C$ נסמן: $r=\frac{1}{2}\min\left\{ \left|x\right|,\left|y\right|\right\}$ ואז: $B\left(\left(x,y\right),r\right)\subseteq C$, כי אם $\left(a,b\right)\in B\left(\left(x,y\right),r\right)$ אז:

$$\left|a-x\right|<\sqrt{\left|x-a\right|^{2}+\left|y-b\right|^{2}}<r\leq\frac{1}{2}\left|x\right|$$

ולכן:

$$a>\left|x\right|-\frac{1}{2}\left|x\right|>0$$

באופן דומה, $|b-y|<\frac{1}{2}|y|$ ולכן:

$$b<y+\left|\frac{1}{2}y\right|=-|y|+\frac{1}{2}|y|<0$$

וסה"כ: $(a,b)\in C$.

הקבוצה לא סגורה, כי משלימתה אינה פתוחה; $(0,0)\in C^c$ אך לכל $r>0$, $B\left((0,0),r\right)\nsubseteq C$.

הקבוצה פתוחה, ולכן כל $(x,y)\in C$ היא נקודת גבול.

יתר על כן, גם הנקודות: $\{(x,y)\,|x=0,y\leq 0\}\cup\{(x,y)\,|y=0,x\geq 0\}$ הן נקודות גבול, כי לכל (x,y) כזו ולכל $r>0$,

$$\left(x+\frac{r}{2},y-\frac{r}{2}\right)\in B\left((x,y),r\right)\cap C$$

נקודות אחרות אינן נקודות גבול (קל לראות) ולכן בסה"כ נקודות הגבול הן $\{(x,y)\,|x\geq 0,y\geq 0\}$.

5. ניתן דוגמה בכל אחד מהסעיפים כמבוקש.

(א) נתבונן באוסף הנקודונים $\left\{\frac{1}{n}\right\}\subseteq\mathbb{R}$ כאשר $n\in\mathbb{N}$. כמו שראינו, כל נקודון ב־$\mathbb{R}$ הוא קבוצה סגורה (כל נקודון הוא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי), אך האיחוד: $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינו קבוצה סגורה, מכיוון ש־0 הוא נקודת הצטברות של הקבוצה אך לא שייך אליה.

(ב) נתבונן באוסף הקטעים הפתוחים $\left(1-\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}\right)\subseteq\mathbb{R}$, כאשר $n\in\mathbb{N}$. כל קטע פתוח הוא קבוצה פתוחה, אך החיתוך הוא:

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}\right)=\{1\}$ נקודון וכמו שראינו נקודון ב־$\mathbb{R}$ אינו קבוצה פתוחה.

(ג) לפי היינה־בורל, נחפש מרחב שאינו מהצורה $\mathbb{R}^n$.

אם כך, נבחר את הקבוצה $\mathbb{Z}$ עם המטריקה הדיסקרטית, ונתבונן בקבוצה $\mathbb{Z}$ כולה.

הקבוצה $\mathbb{Z}$ סגורה כי היא כל המרחב.

הקבוצה $\mathbb{Z}$ חסומה; מהגדרת המטריקה הדיסקרטית, $\mathbb{Z}\subseteq B\left(0,2\right)$.

עם זאת, הקבוצה $\mathbb{Z}$ אינה קומפקטית, מכיוון שלכיסוי הפתוח $\{\{a\} : a \in \mathbb{Z}\}$ שלה אין תת־כיסוי סופי. זהו אכן כיסוי פתוח, מכיוון שבמטריקה הדיסקרטית כל קבוצה (ובפרט הנקודונים) היא פתוחה.

6. לאו דווקא. נתבונן בסדרה $x_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$ ב־$\mathbb{R}$. $|x_n| < 1$ ולכן חסומה.

$$d_2(x_n, 0) = |x_n| = 1 - \frac{1}{n}$$

עולה ממש, אך הסדרה לא מתכנסת.

7. נניח בשלילה שהחיתוך אינו ריק. לכן:

$$\mathbb{R}^n = \emptyset^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

לפי דה־מורגן, ולכן $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i^c$. X קומפקטי, והקבוצות A_i^c פתוחות (כי המשלימות שלהן סגורות) ולכן קיים תת־כיסוי סופי של X:

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} A_{i_k}^c$$

מצד שני, $\emptyset \neq \bigcap A_{i_k} \supseteq X$ כי החיתוך סופי, כלומר קיים $x \in \bigcap A_{i_k}$ אלא שאז $x \in X$ ולכן גם:

$$x \in \bigcup A_{i_k}^c = \left(\bigcap A_{i_k}\right)^c$$

וסתירה! לכן החיתוך אינו ריק.

8. נשתמש בכך שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה והפנים היא הפתוחה המקסימלית שמוכלת.

(א) נוכיח. $A \cap B \subseteq B \subseteq cl\left(B\right)$, $A \cap B \subseteq A \subseteq cl\left(A\right)$ ולכן:

$$A \cap B \subseteq cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right)$$

מכיוון שהקבוצות $cl\left(A\right), cl\left(B\right)$ סגורות, גם $cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right)$ סגורה, ומכיוון שהיא מכילה את $A \cap B$ והסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה, נקבל שאכן:

$$cl\left(A \cap B\right) \subseteq cl\left(A\right) \cap cl\left(B\right)$$

(ב) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A=(0,1)\,,B=(1,3)$ ב־$\mathbb{R}$. מכיוון שהחיתוך ריק, גם $cl\left(A\cap B\right)=\emptyset$. מאידך גיסא,

$$cl\left(A\right)=\left[0,1\right],cl\left(B\right)=\left[1,3\right]\Longrightarrow cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)=\left\{1\right\}$$

ולכן $cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)\nsubseteq cl\left(A\cap B\right)$.

(ג) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A=\left[0,1\right],B=\left[1,3\right]$ ב־$\mathbb{R}$. מצד אחד,

$$int\left(A\right)=\left(0,1\right),int\left(B\right)=\left(1,3\right)\Longrightarrow int\left(A\right)\cup int\left(B\right)=\left(0,3\right)\setminus\left\{1\right\}$$

ומצד שני:

$$A\cup B=\left[0,3\right]\Longrightarrow int\left(A\cup B\right)=\left(0,3\right)$$

ולכן $int\left(A\cup B\right)\nsubseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$.

(ד) נוכיח. $int\left(A\right)\subseteq A\subseteq A\cup B, int\left(B\right)\subseteq B\subseteq A\cup B$ ולכן:

$$int\left(A\right)\cup int\left(B\right)\subseteq A\cup B$$

מכיוון שהקבוצות $int\left(A\right),int\left(B\right)$ פתוחות גם $int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$ פתוחה ומכיוון שהיא מוכלת ב־$A\cup B$ והפנים הוא הפתוחה המקסימלית שמוכלת, נקבל:

$$int\left(A\cup B\right)\supseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$$

9. שוב, נשתמש בכך שהסגור הוא הסגורה המינימלית שמוכלת.

(א) נשתמש בהכלה דו־כיוונית. מתקיים: $B\left(a,r\right)\subseteq B\left[a,r\right]$. הכדור הסגור הוא קבוצה סגורה ומכיוון שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה,

$$cl\left(B\left(a,r\right)\right)\subseteq B\left[a,r\right]$$

הכיוון הזה נכון בכל מרחב מטרי.

תהי $x \in B[a,r]$. נראה שהיא נקודת הצטברות של $B(a,r)$ ואז לפי משפט $x \in cl(B(a,r))$.

אם כן, $\|x-a\| \le r$. נתבונן באיברים מהצורה:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x + \frac{a}{n}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. מתקיים: $\|x_n - x\| = \frac{1}{n}\|x-a\| \le \frac{r}{n} < r$ ולכן $x_n \in B(0,1)$.

לכל r_0 קיים n עבורו $\frac{r}{n} \le r_0$ ולכן לכל r_0 קיים $x_n \in B(x,r_0)$ ולכן x נקודת הצטברות של $B(a,r)$.

לכן $x \in cl(B(a,r))$ ולכן $B[a,r] \subseteq cl(B(a,r))$ ובסך הכל הוכחנו את הדרוש.

(ב) נבחר $X = \{a,b\}$ קבוצה עם שני איברים שונים ועם המטריקה הדיסקרטית: $d(a,b) = 1$.

מתקיים: $B(a,1) = \{a\}$. זו קבוצה סגורה (כמו כל קבוצה במרחב דיסקרטי) ולכן $cl(B(a,1)) = \{a\}$.

מצד שני, $B[a,1] = X$.

10. לא. נתבונן בקבוצה $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$. מצד אחד $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ (חשבו מהן נקודות ההצטברות של $\mathbb{Q}$) ומצד שני:

$$cl(int(\mathbb{Q})) = cl(\emptyset) = \emptyset$$

11. נתון ש־A,B קשירות.

(א) לא בהכרח. נתבונן בזוג הכדורים הסגורים ב־$\mathbb{R}^2$:

$$A = B[0,1], B = B[2,1]$$

ובאיחוד שלהם $A\cup B$. החיתוך של הכדורים לא ריק ולכן (ממשפט) גם האיחוד קשיר.

עם זאת, הפנים של האיחוד הוא הקבוצה:

$$int\left(A\cup B\right)=B\left(0,1\right)\cup B\left(2,1\right)$$

וזו אינה קבוצה קשירה.

(ב) אותה דוגמה כמו בסעיף הקודם תעבוד גם כאן.

12. נוכיח זאת. יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{2}\backslash A$ ונראה שיש ביניהן מסילה, פונקציה רציפה כנדרש.

אם $x=y$, קיימת ביניהן מסילה - פונקציה קבועה.

אם $x\neq y$, מכיוון שעוצמת כל הישרים העוברים דרך x היא א, קיים ישר l_{x} שעובר דרך x ולא עובר באף נקודה מ$-A$ (זכרו שכל ישר נקבע על ידי שתי נקודות בצורה יחידה).

באופן דומה, קיים ישר l_{y} העובר דרך y ולא עובר באף נקודה מ$-A$, ובנוסף שיפועו שונה משיפועו של l_{x}.

לכן, l_{x},l_{y} נחתכים בנקודה שנסמנה ב$-z$. המסילה שלנו תהיה הקטע מ$-x$ עד לנקודת החיתוך והקטע מנקודת החיתוך עד ל$-y$.

מעט יותר פורמלית, המסילה היא הפונקציה γ המעתיקה את הקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ לקטע שבין x לבין z, ואת הקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$ לקטע שבין z לבין y.

13. נזכור ש$-x\in\lim A$ אם לכל $r>0$ קיים $a\in A$ שונה מ$-x$ כך ש$-a\in B\left(x,r\right)$.

(א) נפריד:

$$A=\left\{ \left(\frac{1}{n},0\right)|n\in\mathbb{N}\right\} ,B=\left\{ \left(-\frac{1}{n},0\right)|n\in\mathbb{N}\right\}$$

ואז $\lim A=\lim B=\left\{ \left(0,0\right)\right\}$ ולכן $\lim\left(A\right)\cap\lim B=\left\{ \left(0,0\right)\right\}$.

מצד שני, $A\cap B=\emptyset$ ולכן $\lim\left(A\cap B\right)=\emptyset$.

(ב) נוכיח.

יהי $x\in\lim A\cup\lim B$. בה"כ, $x\in\lim A$.

לכן, לכל $r>0$ קיים $a\in A\subseteq A\cup B$ שונה מ־x כך ש־$a\in B\left(x,r\right)$, ולכן $x\in\lim\left(A\cup B\right)$.

לצד שני, יהי $x\in\lim\left(A\cup B\right)$. נניח בשלילה ש־$x\notin\lim A,\lim B$.

לכן, קיימים $0<r_A,r_B$ כך שלכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ שונים מ־x מתקיים:

$$a\notin B\left(x,r_A\right),b\notin B\left(x,r_B\right)$$

נסמן $r=\min\left\{r_A,r_B\right\}$. מכיוון ש־$x\in\lim\left(A\cup B\right)$, קיים $a\in A\cup B$ שונה מ־x כך ש־$c\in B\left(x,r\right)$.

בה"כ, $c\in A$ ואז $c\in B\left(x,r\right)\subseteq B\left(x,r_A\right)$ וסתירה! לכן $x\in\lim A\cup\lim B$.

בעזרת הכלה דו־כיוונית הוכחנו את הדרוש.

(ג) נפריך:

$$A=\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\},B=[0,1]$$

ואז $\lim A\times\lim B=\{0\}\times[0,1]$ אך $\lim\left(A\times B\right)=\left(\left(A\cup\{0\}\right)\times B\right)$.

(ד) נפריך:

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<6\right\},A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 6\right\}$$

ואז $\lim\left(A\backslash B\right)=A\backslash B$ אך $\lim A\backslash\lim B=\emptyset$.

14. נראה שסדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

(א) תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במרחב.

לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $m,n>n_0$ מתקיים:

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

לכן, לכל $x_0\in[a,b]$ מתקיים: $\left|f_n\left(x_0\right)-f_m\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$. אי לכך, הסדרה $\{f_n\left(x_0\right)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת.

נסמן את גבול הסדרה ב־$f\left(x_0\right)$.

סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־f. נראה שזו התכנסות

בנורמה.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| <$ ε וגם קיים $n_{x_0} > n_0$ עבורו $\left|f_{n_{x_0}}(x_0) - f(x_0)\right| < \varepsilon$. בפרט:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \left|f_n(x_0) - f_{n_{x_0}}(x_0)\right| + \left|f_{n_{x_0}}(x_0) - f(x_0)\right| < 2\varepsilon$$

ובפרט $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ לכל $n > n_0$ ולכן הסדרה אכן מתכנסת.

(ב) סדרה במרחב זה היא סדרה של סדרות, ולכן יש לנו שני אינדקסים. נסמן אחד למעלה ואחד למטה, ולא נתבלבל עם מעריך של חזקה.

תהי $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לכן, לכל m קבוע הסדרה $\{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב$-\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת. נסמן את גבול הסדרה ב־x_m.

נתבונן בסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. ואז:

$$\sum |x_m|^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum |x_m^n|^2 \le \sup \|\{x_m^n\}_m\|_2^2 < M < \infty$$

עבור $M > 0$ כלשהו, מכיוון שסדרת קושי היא סדרה חסומה.

מכאן, $\sum |x_m|^2 < \infty$ ולכן $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \in l_2$.

לפי ההגדרה:

$$\left\|\left\{x_m^l\right\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}\right\|_2 = \sqrt{\sum |x_m^l|^2 - \sum |x_m^n|^2} < \varepsilon$$

עבור n, l גדולים מספיק. נשאיף $l \longrightarrow \infty$ ונקבל:

$$\|\{x_m\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \sqrt{\sum |x_m|^2 - \sum |x_m^n|^2} \le \varepsilon$$

ולכן הסדרה $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. לכן המרחב שלם.

15. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

(א) נניח שקיימת סדרת מספרים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ששואפת לאינסוף ו$-\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל$-x$.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

כמו כן, קיים k עבורו $n_k > n_0$ ו־$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, מהתכנסות תת־הסדרה.

לכן, לכל $n > n_0$:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon$$

ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x.

(ב) במרחב קומפקטי, לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת ובפרט לכל סדרת קושי יש תת־סדרה מתכנסת. לפי הסעיף הקודם פירוש הדבר שכל סדרת קושי היא בעצמה סדרה מתכנסת, ולכן המרחב שלם.

16. נניח שהמרחב לא שלם. לכן, קיימת סדרת קושי לא מתכנסת, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. נגדיר: $F_n = \{x_m\}_{m=n}^{\infty}$, זנב הסדרה החל מהאיבר ה־n.

למה אלו קבוצות סגורות? אלו סדרות קושי לא מתכנסות. סדרה כזו היא קבוצה סגורה, מכיוון שאם הייתה לה נקודת הצטברות אז היא הייתה גבול חלקי של הסדרה ולפי השאלה הקודמת זה היה הגבול של הסדרה עצמה והסדרה הייתה מתכנסת וסתירה! לכן אין נקודות הצטברות והקבוצה סגורה (שהרי היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה).

מכיוון שהסדרה היא סדרת קושי, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n, m > n_0$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. כלומר, כל שני איברים ב־F_{n_0} קרובים אחד לשני עד כדי ε ולכן $\delta(F_{n_0}) \leq \varepsilon$. בפרט, $\delta(F_{n_0}) \longrightarrow 0$, אך $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_m\}_{m=n}^{\infty} = \emptyset$.

לצד השני, אם המרחב שלם, נבחר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$x_n \in F_n$. לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 עבורו $\delta(F_{n_0}) < \varepsilon$ ובפרט לכל $m, n > n_0$ מתקיים $x_n, x_m \in F_{n_0}$ ולכן:

$$d(x_n, x_m) \leq \delta(F_{n_0}) < \varepsilon$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת לגבול x, כי המרחב שלם. בנוסף, לכל n מתקיים: $\{x_m\}_{m=n}^{\infty} \subseteq F_n$ ולכן הגבול x שייך ל־F_n.

לכן, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ואם כך $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

3 רציפות במרחבים מטריים, ובמיוחד ב$-\mathbb{R}^n$.

הגדרה 3.1 תהי $f:X\to Y$ פונקציה ותהיינה $A\subseteq X, B\subseteq Y$.

1. **התמונה** של A מוגדרת על ידי: $f\left(A\right)=\left\{f\left(a\right)|a\in A\right\}$.
2. **התמונה ההפוכה** של B מוגדרת על ידי: $f^{-1}\left(B\right)=\left\{x\in X|f\left(x\right)\in B\right\}$.

התמונה היא קבוצת כל התמונות; התמונה ההפוכה היא קבוצת כל המקורות.

הגדרה 3.2 נאמר שפונקציה $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,d_2\right)$ היא **רציפה**, אם לכל $V\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}\left(B\right)\subseteq X$ פתוחה.

כלומר, תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה. אפשר להכליל הגדרה זו למרחבים כלליים, כפי שתראו בקורס בטופולוגיה.

באופן שקול, פונקציה היא רציפה אם תמונה הפוכה של סגורה היא סגורה.

משפט 3.3 כל פונקציות שהן רציפות ב$-\mathbb{R}$ רציפות גם ב$-\mathbb{R}^n$. פולינומים, פונקציות טריגונומטריות וטריגונומטריות הפוכות, פונקציות היפרבוליות, פונקציות רציונליות, פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות וכן הלאה; כולן רציפות בכל מספר משתנים.

<u>תרגיל:</u>

הראו שכל מישור ב$-\mathbb{R}^3$ הוא קבוצה סגורה.

<u>פתרון:</u>

משוואת מישור היא $ax+by+cz+d=0$.

נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f\left(x,y,z\right)=ax+by+cz+d$.

זו פונקציה רציפה (פולינום) ומתקיים:

$$f^{-1}\left(\left\{0\right\}\right)=\left\{\left(x,y,z\right)|ax+by+cz+d=0\right\}$$

שזהו המישור שלנו. $\left\{0\right\}$ סגורה, f רציפה ולכן גם המישור הוא סגור.

הגדרה 3.4 תהי $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$. נאמר שהגבול של f בנקודה a הוא L ונסמן $\lim_{x\to a}f(x)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_1(x,a)<\delta$ אז $d_2(f(x),L)<\varepsilon$.

פונקציה היא רציפה בנקודה אם הגבול בנקודה שווה לערך בנקודה. כלומר:

f רציפה בנקודה a אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_1(x,a)<\delta$ אז $d_2(f(x),f(a))<\varepsilon$.

למקרה שהמילה "רציפות" עוררה בכם געגועים לאפסילון ודלתא, הנה הם במלוא תפארתם.

איך מחשבים גבול של פונקציה ממשית? במשתנה אחד, בדקנו את שני הגבולות החד־צדדיים; אם הם קיימים ושווים, הגבול קיים. זאת, מכיוון שלנקודה בישר הממשי אפשר לשאוף משני כיוונים בלבד ־ ימין ושמאל. מה קורה במימדים יותר גבוהים? כבר במישור, אפשר לשאוף אל נקודה מאינסוף מסלולים שונים!

מצד אחד, כדי להראות שאין גבול יש לבחור שני מסלולים שונים אל עבר הנקודה שהגבול בהם שונה, ומגוון המסלולים מקל עלינו את הבחירה. מצד שני, כדי להראות שיש גבול יש להראות שכל המסלולים מתכנסים לאותו הגבול.

כדי לעשות זאת, אפשר להשתמש במשפט הסנדויץ', באריתמטיקה של גבולות ובהצבה של כמה משתנים כמשתנה אחד (שאת הגבול שלו אנו יודעים לחשב). לא ננסח את משפט הסנדויץ' ואת המשפט על אריתמטיקה של גבולות מכיוון שהם הכללות ישירות של אותם המשפטים ביחס לפונקציות של משתנה יחיד.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x-2y}{2x-3y}$.
במסלול $y=0$ נקבל $\frac{3}{2}$ ובמסלול $x=0$ נקבל $\frac{2}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.
$\lim x=0$, $\lim\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1$ ולכן בסה"כ הגבול הוא 0.
3. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{4x+y-z}{2x-5y+2z}$.
במסלול $x=y=0$ נקבל $-\frac{1}{2}$ ובמסלול $x=z=0$ נקבל $-\frac{1}{5}$ ולכן הגבול אינו קיים.

.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy-y^2}}$.

נסמן: $t=x-y$, ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy-y^2}} = \lim_{t\to0} e^{\frac{-|t|}{t^2}} = 0$$

.5 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$.

במסלול $x=0$ נקבל 0.

במסלול $x=y, z=x^2$ נקבל $\frac{1}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.

.6 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|} cos\frac{1}{y^2}$.

לפי סנדוויץ':

$$0 \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|} cos\frac{1}{y^2}\right| \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right| \le \left|\frac{x^2}{|x|}\right| = |x| \to 0$$

ולכן הגבול הוא 0.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

רציפה?

<u>פתרון:</u>

ברור שהפונקציה רציפה בכל נקודה שאינה $(0,0)$.

בנקודה $(0,0)$ הגבול לא קיים, כי אם נתבונן במסלולים $y=ax$, נקבל:

$$\lim_{x\to0} f(x,ax) = \lim_{x\to0} \frac{x^2+x^3+a^3x^3}{x^2+a^2x^2} = \frac{1}{1+a^2}$$

כלומר הגבול משתנה בהתאם ל$-a$ ולכן הוא לא קיים, ולכן f אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

תרגיל:

האם ניתן להגדיר את $f\left(x,y\right)=\frac{x^{2}+y^{2}}{\sin(x^{2}+y^{2})}$ כרציפה ב־$(0,0)$?

פתרון:

כן. נסמן: $t=x^{2}+y^{2}$ ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)=\lim\frac{x^{2}+y^{2}}{\sin\left(x^{2}+y^{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1$$

ולכן כדי לקבל רציפות נגדיר: $f\left(0,0\right)=1$.

תרגיל:

האם הפונקציות הבאות רציפות?

1. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\arctan\frac{x^{2}+1}{x^{2}+(y-1)^{2}} & (x,y)\neq(0,1)\\ \frac{\pi}{2} & (x,y)=(0,1)\end{cases}$.

בכל נקודה שאינה $(0,1)$ הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות. בנקודה $(0,1)$ נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}f\left(x,y\right)=\lim_{z\to\infty}\arctan z=\frac{\pi}{2}$$

ולכן הפונקציה רציפה.

2. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{2}y^{2}}{x^{2}y^{2}+(x-y)^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

במסלול $y=x$ נקבל $\lim_{x\to0}f\left(x,x\right)=1$ ולכן לא רציפה בנקודה $(0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה.

3. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{3}-xy^{2}}{x^{2}+y^{2}} & x^{2}+y^{2}\neq0\\ 0 & x^{2}+y^{2}=0\end{cases}$.

לפי סנדוויץ':

$$0\leq\left|\frac{x^{3}-xy^{2}}{x^{2}+y^{2}}\right|\leq\left|\frac{x^{3}}{x^{2}+y^{2}}\right|+\left|\frac{xy^{2}}{x^{2}+y^{2}}\right|\leq\left|\frac{x^{3}}{x^{2}}\right|+\left|\frac{xy^{2}}{y^{2}}\right|=|x|+|x|\to0$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

שימו לב: $x^2+y^2\neq 0$ זהה במשמעותו ל־ $(x,y)\neq(0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה כמנת רציפות.

<u>תרגיל:</u>

א. האם הפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=x\ln\left(x^2+3y^2\right)$$

רציפה ב־ $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

בוודאי שלא, היא הרי לא מוגדרת בנקודה זו.

ב. האם ניתן להגדיר את הפונקציה כך שתהיה רציפה ב־ $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

נבדוק האם הגבול בנקודה קיים. נסמן: $t^2=x^2+3y^2$, ואז: $x^2\leq t^2$ ולכן $|x|\leq|t|$. לפיכך:

$$0\leq\left|x\ln\left(x^2+3y^2\right)\right|=|x|\cdot\left|\ln\left(x^2+3y^2\right)\right|\leq\left|t\ln t^2\right|$$

וזהו גבול של משתנה אחד, ניתן לחשב אותו בעזרת לופיטל:

$$\lim_{t\to0}t\ln t^2=\lim_{t\to0}\frac{2\ln t}{\frac{1}{t}}\overset{L}{=}\lim_{t\to0}\frac{\frac{2}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=0$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)=0$$

ולכן ניתן להגדיר את הפונקציה כך שתהיה רציפה ב־ $(0,0)$: $f\left(0,0\right)=0$.

<u>תרגיל:</u>

בעזרת רציפות, הראו שהקבוצה $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|yx<1\right\}$ פתוחה ב$-\mathbb{R}^2$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x,y\right)=xy$. f רציפה במכפלת הטלות, ואז:

$$D=f^{-1}\left\{(-\infty,1)\right\}$$

הקרן $(-\infty,1)$ פתוחה ב$-\mathbb{R}$ ולכן גם D פתוחה.

משפט 3.5 יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, תהי $x\in X$ ותהי $f:X\to Y$. אזי, התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. אם $x_n\xrightarrow{d}x$ אז $f\left(x_n\right)\xrightarrow{\rho}f\left(x\right)$.

בדומה להגדרת הרציפות לפי היינה, שראינו לגבי פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, ונסמן: $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|f\left(x\right)=y\right\}$. זהו הגרף של הפונקציה. הראו ש$-G$ סגורה ב$-\mathbb{R}^2$.

<u>פתרון:</u>

תהי סדרה $G\supseteq\left\{(x_n,y_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ המתכנסת (לפי d_{max}) לנקודה (x,y). צ"ל $(x,y)\in G$.

נזכור שההטלה p_1 רציפה. לכן:

$$x_n=p_1\left(x_n,y_n\right)\to p\left(x,y\right)=x$$

באופן דומה, ההטלה p_2 רציפה ולכן $y_n\to y$.

כעת, מכיוון שהפונקציה רציפה, $y_n=f\left(x_n\right)\to f\left(x\right)$ ומיחידות הגבול נקבל:

$y=f\left(x\right)$. לכן $(x,y)\in G$ ולכן הקבוצה G סגורה.

<u>תרגיל:</u>

נתבונן במחרב $C[0,1]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

א. תהי $a\in[0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a:C[0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי: $F_a(f)=f(a)$. הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

<u>פתרון:</u>

תהי $\{f_n\}\subseteq C[0,1]$ סדרת פונקציות המתכנסת ל- $f\in C[0,1]$.

נראה ש- $F_a(f_n)\longrightarrow F_a(f)$ ונסיק מכך ש- F_a אכן רציפה.

$F_a(f_n)\longrightarrow F_a(f)$ פירושו $f_n(a)\longrightarrow f(a)$ לפי הגדרת F_a. מתקיים:

$$0\le|f_n(a)-f(a)|\le\max_{x\in[0,1]}\{f_n(x)-f(x)\}=d(f_n,f)$$

ומכיוון ש- $f_n\longrightarrow f$, $d(f_n,f)\longrightarrow 0$ ולכן לפי סנדוויץ', $f_n(a)\longrightarrow f(a)$ ולכן F_a רציפה.

ב. הוכיחו שהקבוצה $\left\{f\in C[0,1]:f\left(\frac{1}{3}\right)<19\right\}$ פתוחה ב- $C[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

שימו לב שקצת קשה לתפוס אינטואיטיבית איך אמורה להיראות קבוצה פתוחה של פונקציות, אבל בעזרת הרציפות החיים קלים:

$$\left\{f\in C[0,1]:f\left(\frac{1}{3}\right)<19\right\}=\left\{f\in C[0,1]:F_{\frac{1}{3}}(f)<19\right\}=F_{\frac{1}{3}}^{-1}((-\infty,19))$$

ומכיוון ש- $(-\infty,19)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ו- $F_{\frac{1}{3}}$ רציפה, גם הקבוצה שלנו פתוחה.

הגדרה 3.6 יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, ותהי $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$.
נאמר ש- f רציפה במידה שווה, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x_1,x_2\in D$ מקיימים $d_1(x_1,x_2)<\delta$ אז $d_2(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

ניזכר קצת ברציפות במידה שווה של פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

איך מראים שפונקציה אינה רציפה במ"ש? מוצאים סדרה או סדרות איברים שההפרשים ביניהם שואפים לאפס, אך ההפרש בין תמונותיהם לא שואף לאפס.

תרגיל:

האם הפונקציה $f(x)=e^x$ רציפה במ"ש ב$-\mathbb{R}$?

פתרון:

לא. יהי $\varepsilon<1$. נתבונן בשתי הסדרות:

$$\{x_n\}=\ln(n+1)\,,\{y_n\}=\ln n$$

מתקיים:

$$|x_n-y_n|=|\ln(n+1)-\ln n|=\left|\ln\frac{n+1}{n}\right|\longrightarrow\ln 1=0$$

כאשר $n\longrightarrow\infty$ (כפלנו וחילקנו בצמוד), ולכן לכל $\delta>0$ קיים n_δ כך שלכל $n>n_\delta$ מתקיים: $|x_n-y_n|<\delta$, אך:

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|e^{\ln(n+1)}-e^{\ln n}\right|=|n+1-n|=1>\varepsilon$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש.

משפט 3.7 תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי f רציפה במ"ש בקטע. משפט זה נקרא משפט קנטור.

איך נכליל את המשפט למרחב מטרי כלשהו?

תהי f פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית K, אזי f רציפה במ"ש ב$-K$.

תרגיל:

האם הפונקציה $f(x,y)=cos\frac{1}{1-x^2-y^2}$ רציפה במ"ש בתחומים הבאים:

א. $A=\left\{(x,y)\,|x^2+y^2<1\right\}$.

פתרון:

לא. נתבונן בסדרות: $a_n=\left(\sqrt{1-\frac{1}{\pi n}},0\right),b_n=\left(\sqrt{1-\frac{1}{\pi(n+1)}},0\right)$. הן נמצאות בתחום שלנו ומתקיים:

$$a_n,b_n\to(1,0)$$

ולכן: $\|a_n - b_n\| \to 0$. אלא שמתקיים:

$$f(a_n) = cos\pi n, f(b_n) = cos\pi(n+1)$$

ולכן:

$$\|f(a_n) - f(b_n)\| = \|cos\pi n - cos\pi(n+1)\| = \|(-1)^n 2\| = 2$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש בתחום A.

ב. $B = \left\{(x,y)\,|3 < x^2 + y^2 < 4\right\}$.

פתרון:

כן. נרחיב את התחום שלנו לתחום:

$$\left\{(x,y)\,|3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

זו קבוצה סגורה וחסומה והפונקציה שלנו רציפה בתחום זה ולכן היא גם רציפה במ"ש עליו; לכן היא גם רציפה בתחום B החלקי לו.

משפט 3.8 תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע.

איך נכליל את המשפט למרחבים מטריים כלליים?

תהי f פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית K, אזי f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע.

תרגיל:

תרגיל:

תהי $\mathbb{R}^2 \supseteq K$ קבוצה קומפקטית עבורה לכל $(x,y) \in K$, $y \neq 0$. ונגדיר $f : K \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x,y) = x^2 + sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right)$$

הוכיחו כי קיים $a \in \mathbb{R}$ חיובי כך שלכל $(x,y) \in K$ מתקיים: $a \leq f(x,y)$.

<u>פתרון:</u>

מכיוון שהפונקציה f רציפה על קבוצה קומפקטית יש לה מינימום ומקסימום ב$-K$.
נסמן את ערך המינימום ב$-a$.

לכן, קיימת $(x_0,y_0) \in K$ כך ש$-a = f(x_0,y_0)$ ולכל $(x,y) \in K$ מתקיים:
$a \leq f(x,y)$.

יתר על כן, ברור שמתקיים:

$$f(x,y) = x^2 + sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right) \geq 0$$

נניח בשלילה שקיימת $(x,y) \in K$ עבורה $f(x,y) = 0$. כלומר:

$$x^2 = 0 \wedge sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right) = 0$$

מהשיוויון הראשון נקבל $x = 0$ אך זה נותן $sin^2\left(e^{\frac{0}{y}}\right) = sin^2 1 \neq 0$ וסתירה!

לכן לא קיימת נקודה (x,y) כזו ולכן $f(x,y) > 0$ לכל נקודה $(x,y) \in K$; בפרט,
$f(x_0,y_0) = a > 0$.

הגדרה 3.9 יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, ותהי $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$ רציפה.

1. אם $K \subseteq X$ קומפקטית, גם $f(K) \subseteq Y$ קומפקטית.

2. אם $C \subseteq X$ קשירה, גם $f(C) \subseteq Y$ קשירה.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ מסילות רציפות עבורן:

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = a, \gamma_2(0) = \gamma_1(1) = b$$

אזי, קיים $t\in(0,1)$ עבורו $f(\gamma_1(t))=f(\gamma_2(t))$.

<u>פתרון:</u>

שימו לב לכך שהקטע פתוח, כלומר אנו לא רוצים לקחת את הקצוות. לכן, נפריך על ידי מסילות ששוות בקצוות בלבד ופונקציה יחסית פשוטה, למשל:

$$f(x,y)=y$$

$$a=(1,0)\,,b=(-1,0)$$

$$\gamma_1(t)=(\cos\pi t,\sin\pi t)\,,\gamma_2(t)=-\gamma_1(t)$$

אך לכל $t\in(0,1)$ נקבל:

$$f(\gamma_1(t))=\sin\pi t>0>-\sin\pi t=f(\gamma_2(t))$$

ולכן לא קיים t כנדרש.

ב. תהיינה $\gamma_1,\gamma_2:[0,1]\to D$ מסילות רציפות עבורן:

$$\gamma_1(0)=\gamma_2(1)=a,\gamma_2(0)=\gamma_1(1)=b$$

אזי, קיים $t\in[0,1]$ עבורו $f(\gamma_1(t))=f(\gamma_2(t))$.

<u>פתרון:</u>

כאן הקטע סגור. נוכיח את הטענה.

ראשית, אם $f(a)=f(b)$ הטענה נכונה, מכיוון ש:

$$f(\gamma_1(0))=f(a)=f(b)=f(\gamma_2(0))$$

אם כן, נניח ש־ $f(a) = f(b)$, ובה"כ $f(b) > f(a)$.

נגדיר פונקציה $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$g(t) = f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_2(t))$$

מצד אחד, $g(0) = f(a) - f(b) < 0$ ומצד שני $g(1) = f(b) - f(a) > 0$. g רציפה כהרכבת רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $t \in [0,1]$ עבורו: $g(t) = 0$, כלומר:

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$$

כנדרש.

הגדרה 3.10 יהי X מרחב מטרי. נאמר ש־X מקיים את **תכונת ערך הביניים** אם לכל פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$, לכל $a, b \in X$ ולכל t בין $f(a)$ לבין $f(b)$ קיים $c \in X$ עבורו: $f(c) = t$.

משפט 3.11 יהי X מרחב מטרי ותהי $E \subseteq X$ קשירה. אזי E מקיימת את תכונת ערך הביניים.

תרגילים נוספים

1. הוכיחו כי הנורמה האוקלידית הסטנדרטית $\|\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה.
2. האם הפונקציות הבאות רציפות?

(א) העתקת ההטלה על הרכיב הראשון, $p_1 : (\mathbb{R}^n, d_{max}) \to (\mathbb{R}, ||)$.

(ב) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

(ג) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)} & (x,y)\neq(2,1)\\ 0 & (x,y)=(2,1)\end{cases}$$

3. הוכיחו בעזרת רציפות:

(א) הקבוצה $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \sin x+xy\leq 5\right\}$ סגורה ב־$\mathbb{R}^2$.

(ב) קבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n\left(\mathbb{R}\right)\subset M_n\left(\mathbb{R}\right)$ פתוחה ב־ $M_n\left(\mathbb{R}\right)$.

4. הוכיחו או הפריכו:

(א) תהיינה d_1,d_2 מטריקות מעל קבוצה X ותהיינה ρ_1,ρ_2 מטריקות מעל קבוצה Y. תהי $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה. אזי גם $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

(ב) תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי f רציפה אם ורק אם לכל **כדור פתוח** $O\subseteq Y$, $f^{-1}\left(O\right)$ פתוחה ב־X.

(ג) תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי f רציפה אם ורק אם לכל **כדור סגור** $O\subseteq Y$, $f^{-1}\left(O\right)$ סגורה ב־X.

5. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $a\in X$.

(א) הוכיחו כי הפונקציה $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_a\left(x\right)=d\left(x,a\right)$ היא רציפה.

(ב) הסיקו שלכל $r>0$ כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

6. האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש?

(א) $f\left(x\right)=\sin x^2$ ב־$\mathbb{R}$.

(ב) $f\left(x,y\right)=\arcsin\frac{x}{y}$ בתחום $D=\left\{(x,y):|x|\leq|y|,y\neq 0\right\}$.

7. תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D ורציפה לפי המשתנה x, כלומר אם מקבעים את $y=y_0$ מקבלים פונקציה רציפה של משתנה אחד:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$$

(א) נניח ש־f רציפה גם לפי y. האם f רציפה?

(ב) נניח ש־f רציפה במ"ש לפי y. האם f רציפה?

(ג) נניח ש־f מקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y: קיים K עבורו: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K\cdot|y_1-y_2|$. האם f רציפה?

פתרונות

1. הנורמה האוקלידית מוגדרת על ידי:

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

והיא רציפה כהרכבת רציפות.

2. נבדוק את רציפות הפונקציות.

(א) הנורמה האוקלידית היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{max}(x,a)<\delta$ אזי $|x-a_1|<\varepsilon$, כאשר $x=(x_1,...,x_n)\,, a=(a_1,...,a_n)$.

מתקיים:

$$|x_1-a_1|<\underset{1\leq i\leq n}{max}\{|x_i-a_i|\}=d_{max}(x,a)$$

יהי $\varepsilon>0$, נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז אם $d_{max}(x,a)<\delta$ אזי $|x_1-a_1|<\delta=\varepsilon$.

באופן כללי, ההטלה על כל רכיב היא רציפה.

(ב) לכל $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציה רציפה כמנת רציפות.

נבדוק האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ שווה ל־0.

במסלול $x=y$, נקבל:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,x)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2+x^3+x^3}{x^2+x^2}=\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}$$

לכן הגבול שונה מ־0 (אין אפילו צורך לבדוק אם הוא אכן קיים) ולכן הפונקציה אינה רציפה.

(ג) בתחום הגדרתה (מהו תחום הגדרתה של הפונקציה?), הפונקציה רציפה כמנת רציפות. היכן שהפונקציה אינה מוגדרת היא בוודאי אינה רציפה.

נבדוק האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)$ שווה ל־0.

נציב $t=xy-2$ ונקבל את הגבול:

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\arcsin t}{\arctan 3t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{3}{1+(3t)^2}}=\frac{1}{3}$$

לפי כלל לופיטל. לכן, הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(2,1)$.

3. נחפש קבוצות מתאימות ונשתמש בתמונה הפוכה.

(א) הפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y)=\sin x+xy$ היא רציפה.

לכן, מכיוון ש־$A=f^{-1}((-\infty,5])$ ו־$(-\infty,5]\subseteq\mathbb{R}$ סגורה, גם A סגורה.

(ב) נזכור שמטריצה היא הפיכה אם ורק אם דטרמיננטתה (למה לא) שונה מאפס.

הפונקציה $\det: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ רציפה (היא הרי פולינום) .

לכן, מכיוון ש־$GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ו־$\mathbb{R}\backslash\{0\}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה, גם $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה.

4. נשתמש בהגדרת רציפות באמצעות קבוצות פתוחות.

(א) הפרכה. ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, את המטריקה d_1 להיות המטריקה הדיסקרטית ואת שאר המטריקות d_2,ρ_1,ρ_2 להיות המטריקה הסטנדרטית.

נקבל שכל פונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ היא רציפה כי כל קבוצה ב־(X,d_1)

היא פתוחה (זו המטריקה הדיסקרטית), אך בוודאי שניתן למצוא פונקציה $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ שאינה רציפה, למשל:

$$f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ -7 & x\le 1\end{cases}$$

(ב) הוכחה. אם f רציפה אז $f^{-1}(O)$ פתוחה ב$-X$ לכל O פתוחה ב$-Y$. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה ולכן לכל כדור פתוח O, $f^{-1}(O)$ פתוחה.
לצד השני, לכל כדור פתוח $O\subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ פתוחה ב$-X$. תהי $U\subseteq Y$ פתוחה. לכל $x\in U$ קיים $r_x>0$ עבורו $B(x,r_x)\subseteq U$.
לכן: $U=\bigcup_{x\in U}B(x,r_x)$, ולכן:

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{x\in U}B(x,r_x)\right)=\bigcup_{x\in U}f^{-1}(B(x,r_x))$$

וזהו איחוד של קבוצות פתוחות ולכן קבוצה פתוחה. תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה ולכן הפונקציה רציפה.

*הראו שתמונה הפוכה של איחוד אכן שווה לאיחוד התמונות ההפוכות.

(ג) הפרכה. ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, d המטריקה הסטנדרטית ו$-\rho$ המטריקה הדיסקרטית. תהי $f=Id$ פונקציית הזהות. הפונקציה אינה רציפה, שכן $\{5\}$ פתוחה ב$-(Y,\rho)$ אך $f^{-1}(\{5\})=\{5\}$ לא פתוחה במטריקה הסטנדרטית.
מצד שני, במטריקה הדיסקרטית כדור סגור ברדיוס 1 הוא המרחב כולו וכדור סגור עם רדיוס קטן מ-1 הוא נקודון מהצורה $\{x\}$.
כעת, גם עבור המרחב כולו: $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ וגם עבור נקודון $\{x\}$ $f^{-1}(\{x\})=\{x\}$ נקבל שהקבוצה אכן סגורה ב$-(X,d)$, אך כמו שהסברנו הפונקציה אינה רציפה.

5. נשתמש בהגדרת רציפות עם אפסילון ודלתא.

(א) יהי $x\in X$, ויהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$, ואז אם $d(x,y)<\delta$ נקבל:

$$|f_a(x)-f_a(y)|=|d(x,a)-d(y,a)|\le d(x,y)<\delta=\varepsilon$$

לפי אי שוויון המשולש, ולכן הפונקציה רציפה.

(ב) מתקיים:

$$B[a,r]=\{x\in X:0\le d(x,a)\le r\}=\{x\in X:0\le f_a(x)\le r\}=f_a^{-1}([0,r])$$

הקטע $[0,r]\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה סגורה והפונקציה f_a רציפה ולכן גם $B[0,r]$ קבוצה סגורה.

6. נראה שהפונקציות אינן רציפות במ"ש, על ידי כך שנצביע על סדרות איברים שההפרשים ביניהם שואפים לאפס אך ההפרשים בין התמונות שלהם לא שואפים לאפס.

(א) לכל $\varepsilon<1$ נתבונן בסדרות המספרים:

$$x_n=\sqrt{\pi n+\frac{\pi}{2}},y_n=\sqrt{\pi n}$$

מתקיים:

$$|x_n-y_n|=\left|\sqrt{\pi n+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\pi n}\right|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\pi n+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\pi n}}\longrightarrow 0$$

כאשר $n\longrightarrow\infty$ (כפלנו וחילקנו בצמוד), ולכן לכל $\delta>0$ קיים n_δ כך שלכל $n>n_\delta$ מתקיים: $|x_n-y_n|<\delta$, אך:

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(\pi n)\right|=1>\varepsilon$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש.

(ב) שוב, נתבונן בסדרות:

$$x_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),y_n=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$$

מתקיים:

$$|x_n-y_n|=\left|\left(0,\frac{2}{n}\right)\right|=\frac{2}{n}\longrightarrow 0$$

כאשר $n\longrightarrow\infty$, אך:

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\sqrt{(\arcsin 1-\arcsin(-1))^2}=\pi$$

ולכן אין רציפות במ"ש.

7. נבדוק האם רציפות מתקיימת.

(א) לא בהכרח. נתבונן בפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \left|\frac{x+y}{x-y}\right| & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 1 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$$

אם מקבעים את x או את y הפונקציה אכן רציפה לפי המשתנה השני:

$$\lim_{x\to0}f\left(x,0\right)=\left|\frac{x}{x}\right|=1,\lim_{y\to0}f\left(0,y\right)=\left|\frac{y}{-y}\right|=1$$

אבל לכל k נקבל במסלולים $y=kx$ גבולות שונים ולכן הפונקציה אינה רציפה.

(ב) לא בהכרח. נתבונן בתחום $D=\left[-1,1\right]^{2}$ ובפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \left|\frac{y}{x}\right| & \left|y\right|\leq\left|x\right|,\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ \left|\frac{x}{y}\right| & \left|x\right|<\left|y\right|\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$$

הפונקציה שלנו רציפה לפי כל אחד מהמשתנים בנפרד (ומכיוון שזהו תחום סגור וחסום, היא גם רציפה במ"ש). אלא שאם נשאף לנקודה $\left(0,0\right)$ במסלול $x=0$ נקבל:

$$\underset{y\to0}{lim}f\left(0,y\right)=0$$

ואם נשאף במסלול $y=x$ נקבל:

$$\underset{x\to0}{lim}f\left(x,x\right)=1$$

כלומר הגבול לא קיים, ולכן הפונקציה אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$.

(ג) הוכחה. נראה שלכל $\left(x_{0},y_{0}\right)\in D$ המקיימים $\left|\left(x,y\right)-\left(x_{0},y_{0}\right)\right|<\delta$, מתקיים $\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_{0},y_{0}\right)\right|<\varepsilon$. ובכן:

$$\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_{0},y_{0}\right)\right|\leq\left|f\left(x,y\right)-f\left(x,y_{0}\right)\right|+\left|f\left(x,y_{0}\right)-f\left(x_{0},y_{0}\right)\right|\leq$$

$$\leq K\left|y-y_0\right|+\left|f\left(x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|$$

f רציפה לפי x כלומר אם $\left|x-x_0\right|<\delta'$ אז לכל y, $\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y\right)\right|<$ ε'. נבחר $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$ ונבחר:

$$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2K},\delta'\right\}$$

ואם נחזור לאי־השוויון נקבל:

$$\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|<K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ולכן הפונקציה רציפה.

4 נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות ונגזרות כיווניות

הנגזרת היא מלכת החדו"א. איך גוזרים פונקציות עם יותר ממשתנה אחד?

כרגע, נתעסק רק בפונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, ובהמשך בפונקציות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

הגדרה 4.1 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. **הנגזרת החלקית** לפי המשתנה x_i בנקודה a מוגדרת כך:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\lim_{\Delta x_i\longrightarrow0}\frac{f\left(a_1,a_2...,a_i+\Delta x_i,a_{i+1},...,a_n\right)-f\left(a_1,...,a_n\right)}{\Delta x_i}$$

נסמן גם: f_{x_i},f'_{x_i}.

הגרדיאנט הוא וקטור הנגזרות החלקיות:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

באופן כללי, כאשר נגזור j_i פעמים לפי המשתנה ה־i, נסמן:

$$\frac{\partial^{j_1+...+j_n}f}{\partial^{j_1}x_1....\partial^{j_n}x_n}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

בכל נקודה שאינה $(0,0)$ נגזור כרגיל, כלומר נתייחס אל המשתנה האחר כאל קבוע.

זו נגזרת של מנה, ונקבל:

$$f_x(x,y)=\frac{4xy\left(y^2-x^4\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{2x^6-2x^2y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ נחשב לפי ההגדרה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{t^4}{t^4}-1}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{1-1}{t}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{t^2}{t^2}-1}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{1-1}{t}=0$$

לא מסובך.

נשאלת השאלה ־ האם $f_{xy}=f_{yx}$? כלומר, האם אפשר להחליף את סדר הגזירה?

משפט 4.2 החלפת סדר הגזירה:

תהא f פונקציה רציפה בסביבה D של הנקודה x^0 ב־$\mathbb{R}^k$, $k\geq2$.

נניח שעבור שני אינדקסים i,j הנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ קיימת ב־D ורציפה ב־x^0, אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^0)$$

כלומר ניתן להחליף את סדר הגזירה.

<u>לדוגמה:</u>

ניתן דוגמה לפונקציה שנגזרותיה אינן מתחלפות. נתבונן בפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} xy\frac{x^{2}-y^{2}}{x^{2}+y^{2}} & x^{2}+y^{2}\neq0\\ \\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$$

נגזור לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,0\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)}{t}$$

וכעת:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(0,t\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,0\right)=\lim_{r\longrightarrow0}\frac{f\left(t,r\right)-f\left(t,0\right)}{r}=\lim_{r\longrightarrow0}\frac{tr\frac{t^{2}-r^{2}}{t^{2}+r^{2}}-0}{r}=t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{t-0}{t}=1$$

מצד שני,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,t\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)}{t}$$

שוב, נחשב כל אחד מהביטויים במונה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=\lim_{r\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{f(r,t)-f(0,t)}{r}=-t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{-t-0}{t}=-1$$

ואכן אם נגזור לפי x ואז לפי y נקבל תוצאה אחרת מאשר אם נגזור לפי y ואז נגזור לפי x. חשבו איזה תנאי לא מתקיים כאן.

הגדרה 4.3 תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה. נאמר שהפונקציה **דיפרנציאבילית** בנקודה $x^0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ אם אפשר לכתוב:

$$f\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_n^0+\Delta x_n\right)=f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(A_i+\alpha_i\left(\Delta x_i\right)\right)\Delta x_i$$

כאשר $A_1,...,A_n$ קבועים ו־$\alpha_1,...,\alpha_n$ הן פונקציות ששואפות ל־0 כאשר Δx שואף ל־0.

כלומר, בסביבת x^0 אפשר להציג את הפונקציה בקירוב טוב כפונקציה ליניארית.

אם פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה אז היא רציפה שם, והקבועים A_i הם הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$A_k=\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^0\right)$$

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות: הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות. תנאי זה לא הכרחי; לאחר התרגיל נדגים זאת.

תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות ־ הפונקציה רציפה והנגזרות החלקיות קיימות. תנאי זה לא מספיק; לאחר התרגיל נדגים זאת.

איך בודקים האם פונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה מסוימת אם לאו?

נבדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

1. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות.

כדי ש- $f(x,y)$ תהיה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ צריך להתקיים:

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)=f_x(0,0)h_1+f_y(0,0)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

החלפנו את Δx_i שבהגדרה ב-h_i. כמו שאמרנו, אם היא אכן דיפ' אז הקבועים הם הנגזרות החלקיות בנקודה. ה-o מסמל את הקירוב.

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{t^3}}{t}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=1$$

ולכן יש לבדוק אם מתקיים:

$$\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}=h_1+h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר, האם:

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^2}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

כמשמעו של o. אך אם ניקח את המסלול $h_1=h_2=\frac{1}{n}$, נקבל:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}}-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0$$

ולכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

2. הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נבדוק האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

אם נתבונן במסלול $x=y$ נקבל:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,x)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1\neq 0$$

ולכן פונקציתנו (הפונקציה שלנו חביבי) כלל אינה רציפה בנקודה $(0,0)$ ולכן בוודאי שאינה דיפ'.

3. הפונקציה:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

נבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}=$$

נציב $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ונקבל:

$$=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}=0=f(0,0,0)$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0,0)$; את הגבול אפשר לחשב בעזרת לופיטל. נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{\sqrt{t^2}}}=0$$

באופן דומה קל לראות ש־$f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=0$.

כעת, על מנת שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית צריך להתקיים:

$$f(h_1,h_2,h_3)-f(0,0,0)=f_x(0,0,0)\,h_1+f_y(0,0,0)\,h_2+f_z(0,0,0)\,h_3+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)$$

כלמור נבדוק האם:

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\longrightarrow(0,0,0)}\frac{1}{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}}=0$$

ואכן, אם נציב $t=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$ נקבל:

$$=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}}=0$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0,0)$.

<u>לדוגמה:</u>

1. דוגמה לכך שרציפות הנגזרות החלקיות היא תנאי מספיק אך לא הכרחי לדיפרנציאביליות:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

לפי מה שלמדנו, ניתן לבדוק שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

בקצרה, הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$ הן 0. לכן, כדי להוכיח דיפרנציאביליות בנקודה יש להוכיח:

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

וזה אכן מתקיים.

אלא שהנגזרות בנקודה אינן רציפות; למשל אם נגזור לפי x נקבל במסלול $y=0$

$$f_x\left(0,0\right)=-\frac{2}{x}cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

שכלל אינה חסומה כאשר $x\to 0$ ולכן לא רציפה.

2. מאידך גיסא, דוגמה לכך שקיום הנגזרות החלקיות הוא לא תנאי מספיק לדיפרנציאביליות:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

הפונקציה אינה רציפה ב־$\left(0,0\right)$(אפשר להתבונן במסלולים מהצורה $y=kx$ ולקבל גבולות שונים) ולכן בוודאי שאינה דיפרנציאבילית.

אף על פי כן, הנגזרות החלקיות קיימות:

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$$

וכך גם $f_y\left(0,0\right)$. אפשר גם להתבונן בפונקציה הראשונה מהתרגיל הקודם.

הגדרה 4.4 משטח ב־$\mathbb{R}^3$ נתון ע"י משוואה $f(x,y,z)=0$ עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה שבסביבה U שלה f גזירה ברציפות.

משוואת **המישור המשיק** למשטח זה בנקודה p_0 היא:

$$f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+f_z(p_0)(z-z_0)=0$$

זכרו שמשוואת מישור היא: $ax+by+cz+d=0$. נורמל למישור במקרה זה הוא וקטור המקדמים, קרי: (a,b,c).

במקרה של המישור המשיק, נקבל שהנורמל הוא $(f_x(p_0),f_y(p_0),f_z(p_0))$, כלומר: $\vec{n}=\nabla f\left(p_0\right)$.

המישור המשיק הוא המרחב הנפרש ע"י וקטורי הנגזרות הכיווניות, אליהם נגיע בהמשך.

תרגיל:

מצאו את כל הנקודות p_0 במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ כך שהמישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 מקביל למישור: $x+y+z=1$.

פתרון:

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה במשטח. נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=2x$$

$$f_y=2y$$

$$f_z=-2z$$

ולכן בנקודה שלנו הנורמל למישור המשיק יהיה $(2x_0,2y_0,-2z_0)$.

כעת, מישורים הם מקבילים אם הנורמלים שלהם תלויים ליניארית.

הנורמל למישור $x+y+z=1$ הוא $(1,1,1)$. לכן, נחפש את כל הנקודות p_0 במשטח כך ש:

$$a\cdot(1,1,1)=(2x_0,2y_0,-2z_0)$$

נקבל:

$$x_0=\frac{a}{2},y_0=\frac{a}{2},z_0=-\frac{a}{2}$$

כעת, הנקודה שלנו על המשטח, ולכן צריך להתקיים:

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1 = 0$$

כלומר:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$$

ולכן $a = \pm 2$.

ולכן שתי הנקודות שתקיימנה את הדרוש הן:

$$(1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

הגדרה 4.5 תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה. נגדיר את **הנגזרת הכיוונית** של f בכיוון h בנקודה a להיות:

$$D_h f(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

משפט 4.6 תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית, ויהיו $a, h \in \mathbb{R}^n$. אזי:

$$D_h f(a) = \nabla f(a) \cdot h$$

הנגזרת הכיוונית בכיוון הגרדיאנט (המנורמל) היא המקסימלית.

כלומר, בכיוון זה הפונקציה עולה בקצב הגדול ביותר.

הערה 4.7 נהוג לחשב את הנגזרת הכיוונית עם וקטור שאורכו 1, כלומר וקטור מנורמל.

תרגיל:

בנקודה $a=(1,1,1)$, באיזה כיוון הפונקציה

$$f\left(x,y,z\right)=x\arctan\left(yz\right)$$

עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו וקטור זה ע"י וקטור שאורכו 1.

כמו כן, חשבו את הנגזרת של f בנקודה a בכיוון זה.

פתרון:

הנגזרות החלקיות של f הן:

$$f_x=\arctan\left(yz\right)$$

$$f_y=\frac{xz}{1+\left(yz\right)^2}$$

$$f_z=\frac{yx}{1+\left(yz\right)^2}$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בלכ נקודה ולכן f דיפרנציאבילית.

כעת, כיוון העלייה המקסימלי הוא כיוון הגרדיאנט המנורמל. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f\left(1,1,1\right)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ולכן וקטור הכיוון של העלייה המקסימלית מאורך 1 יהיה:

$$h=\frac{\nabla f\left(1,1,1\right)}{\left\|\nabla f\left(1,1,1\right)\right\|}=\left(0.743,0.473,0.473\right)$$

ומכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, הנגזרת הכיוונית בכיוון זה תהיה:

$$D_hf\left(a\right)=\nabla f\left(1,1,1\right)\cdot h=1.056$$