פתרון תרגיל 7 חדו"א 2 למורים באר שבע תש"ף

2 ביולי 2020

1. נסמן:

$$F\left(x\right)=\int\limits_{0}^{x}\ln3tdt$$

לפי המשפט היסודי, $F'\left(x\right)=\ln3x$. כעת, נשים לב שמתקיים:

$$g\left(x\right)=\int\limits_{0}^{x^{3}}\ln3tdt-\int\limits_{0}^{x^{2}}\ln3tdt=F\left(x^{3}\right)-F\left(x^{2}\right)$$

לכן:

$$g'=F'\left(x^{3}\right)\cdot\left(x^{3}\right)'-F'\left(x^{2}\right)\cdot\left(x^{2}\right)'=f\left(x^{3}\right)\cdot3x^{2}-f\left(x^{2}\right)\cdot2x=3x^{2}\ln3x^{3}-2x\ln3x^{2}$$

2. נגזור ונשווה ל־0:

$$0=F'\left(x\right)=\frac{\sin x}{x}$$

לכן $\sin x=0$ ולכן $x=\pi k$ עבור $k>0$ הן נקודות חשודות. נגזור שנית: $F''=\frac{x\cos x-\sin x}{x^{2}}$. מהו הסימן של F'' בנקודות πk? אם k זוגי, המונה חיובי ולכן זו מינימום; אם k אי־זוגי, המונה שלילי ולכן זו מקסימום.

3. קודם כל, נרשום:

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\int_{0}^{x}\sin tdt}{x}$$

אפשר לחשב את האינטגרל, נשתמש במשפט היסודי; מכיוון שמדובר בגבול מהצורה "$\frac{0}{0}$" אפשר להשתמש בלופיטל ולקבל:

$$=\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sin x}{1}=0$$

4. פשוט לחשב.

(א)

$$\int_0^3 \left(5x^2+2x-1\right)dx = \left(\frac{5x^3}{3}+x^2+x\right)_{x=0}^{x=3} = 57$$

(ב) בחלקים:

$$\int_1^e x\ln x dx = \left\{\begin{array}{cc} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=x & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_{x=1}^{x=e} = \frac{e^2+1}{4}$$

(ג) נציב $t=x^3$, אז $dt=3x^2dx$ כלומר $x^2dx=\frac{1}{3}dt$ ונקבל:

$$\int_0^1 x^2e^{x^3}dx = \int e^t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{3}$$

5. (א) מהו המשיק? הנגזרת היא $f'=2\cos 2x$, לכן שיפוע המשיק הוא: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$. הנקודה היא $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ולכן משוואת המשיק היא:

$$y=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-2x+\pi$$

המשיק נמצא מעל גרף הפונקציה בתחום - בין $x=0$ (ציר ה־y) לבין $x=\frac{\pi}{2}$ (נקודת ההשקה), ולכן:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2x+\pi-\sin 2x\right)dx=\frac{\pi^2}{4}-1$$

(ב) ראשית, נקודות החיתוך עם ציר ה־x הן $0,3$ הפונקציה היא: $f=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ולכן הנגזרת היא: $f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. מכאן:

$$1+\left(f'\right)^2=1+\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2=1+\frac{1}{4}x^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^1=\frac{1}{4}x^{-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^1=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

ונקבל:

$$L=\int_0^3\sqrt{1+\left(f'\right)^2}dx=\int_0^3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx=3.4641$$

(ג) לפי הנוסחה:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx$$

כאן יש להשתמש בהצבה אוניברסלית: $t = \tan\frac{x}{2}$ ואז: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dt = \frac{2}{1+t^2}$ ומקבלים:

$$= \pi \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2\pi \int \frac{1}{1+t^2+2t} dt = 2\pi \int \frac{1}{(t+1)^2} dt = -\frac{2\pi}{t+1} =$$

$$= -\frac{2\pi}{\tan\frac{x}{2}+1}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \pi$$