# תרגיל 1 מבוא לתורת החבורות

**שאלה 1.1** נתונות קבוצות שמוגדרת עליהן פעולה. ענו עבור כל אחד מהמקרים: האם הוא אגודה (=חבורה למחצה)? האם הוא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם הוא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

1. $(\mathbb{N},*)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a*b=a+b+2$.

2. $(\mathbb{Z},*)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a*b=a+b+2$.

3. $(\mathbb{N},\max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

4. $(2\mathbb{Z},\cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

5. $(\mathbb{R},*)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a*b=\sqrt{a+b}$.

6. תהי $X$ קבוצה. $(P(X),\triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של $X$. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A,B\in P(X)$ לפי $A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

7. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$$

8. $(A,\cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

9. המספרים המרוכבים מערך מוחלט 1 עם כפל רגיל

$$A=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$$

**שאלה 1.2** תהי $G$ חבורה. הוכיחו כי $G$ אבלית אם ורק אם לכל $a,b\in G$ מתקיים כי $(ab)^2=a^2b^2$.

**שאלה 1.3** תהי $(G,\cdot)$ חבורה. נבחר $g\in G$ מסוים. נגדיר פעולה חדשה על $G$ לפי $a*b=agb$. האם $(G,*)$ היא חבורה? אילו אקסיומות של חבורה מתקיימות ואילו לא?

**שאלה 1.4** עבור אילו ערכי $n$ החבורה $S_n$ היא אבלית (זכרו: $S_n$ היא חבורת כל התמורות על $n$ איברים).

**שאלה 1.5** תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נגדיר את התומך של $\sigma$ להיות קבוצת האיברים שהיא משנה. כלומר:

$$\operatorname{supp} \sigma = \{k \in \{1, \ldots n\} \mid \sigma(k) \neq k\}$$

1. הוכיחו כי אם $i \in \operatorname{supp} \sigma$ אז $\sigma(i) \in \operatorname{supp} \sigma$

2. שתי תמורות $\sigma$ ו $\tau$ נקראות זרות אם $\operatorname{supp} \sigma \cap \operatorname{supp} \tau = \varnothing$. הוכיחו כי אם $\sigma$ ו $\tau$ זרות אז $\sigma\tau = \tau\sigma$.

**שאלה 1.6** תהי $G$ חבורה.

1. נגדיר חזקה חיובית של איבר בצורה רקורסיבית:

$$a^0 = 1$$
$$a^n = a^{n-1} \cdot a$$

הוכיחו באינדוקציה שחוקי החזקות הרגילים מתקיימים (עבור $n, m$ מספרים טבעיים):

(א) $a^n a^m = a^{n+m}$

(ב) $(a^n)^m = a^{nm}$

2. הוכיחו כי $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$

**הערה:** את ההגדרה מסעיף $1$ אפשר להרחיב לכל מספר שלם באופן הבא: ואם $n$ מספר טבעי אז

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$$

אפשר להוכיח שחוקי החזקות מסעיף $1$ עדיין מתקיימים (עבור $m, n$ שלמים כלשהם). - אתם מוזמנים לעשות זאת כתרגיל (צריך לפצל לכל מני מקרים)