סדרות וטורים של פונקציות

סדרות וטורים של פונקציות.

הגדרה: סדרה $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ של פונקציות היא התאמה, שבה לכל n טבעי מתאימה פונקציה $f_n\left(x\right)$.

לכל x_0 השייך לתחום ההגדרה של $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ שנציב, נקבל **סדרת מספרים**: $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}$.

אם $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}$ מתכנסת, אז נאמר שסדרת הפונקציות $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ **מתכנסת נקודתית** ב-x_0.

אם $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ מתכנסת נקודתית לכל $x_0 \in I$, אז נאמר ש-$\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ **מתכנסת נקודתית בקטע** I.

הגדרה: בהינתן סדרת פונקציות $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$, **פונקצית הגבול** (אם קיימת) היא: $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right)$.

דוגמה: קבע התכנסות של: $f_n\left(x\right)=x^n$ בקטע $\left[0,1\right]$.

פתרון: לכל $x\in\left[0,1\right)$ מתקיים: $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$. עבור $x=1$: $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} 1^n=1$.

בסה"כ סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בכל $\left[0,1\right]$ ופונקצית הגבול היא: $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$.

הגדרה: תהא $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I. נאמר כי $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ **מתכנסת במידה שווה בקטע** I, אם: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ |\ \forall n>n_0, \forall x\in I:\ \left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

הסבר: תהא $f\left(x\right)$ פונקצית הגבול של הסדרה $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ בקטע I. נגדיר "פס ε" להיות המרווח בין $f\left(x\right)-\varepsilon$ ל- $f\left(x\right)+\varepsilon$. הסדרה $\left\{f_n\left(x\right)\right\}$ מתכנסת במידה שווה בקטע I לפונקצית הגבול, אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שממנו והלאה, כל $f_n\left(x\right)$ תהיה מוכלת כולה (לאורך הקטע I), בתוך פס ה-ε (סביב פונקצית הגבול).

דוגמה: תהא סדרת הפונקציות $g_k(x)=\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2$ בקטע $[0,1]$.

פונקצית הגבול היא: $g(x)=\lim_{k\to\infty} g_k(x)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2=x^2 \quad \forall x\in[0,1]:$.

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בקטע.

נבדוק התכנסות במ"ש: $\forall x\in[0,1]: \quad |g_k(x)-g(x)|=\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2-x^2\right|=\frac{|x^2|}{k}\le\frac{1}{k}$

ולכן לכל $\varepsilon>0$ נוכל לקחת: $k_0>\frac{1}{\varepsilon}$ ולקבל:

$$\forall k>k_0,\ \forall x\in[0,1]: |g_k(x)-g(x)|<\frac{1}{k}<\frac{1}{k_0}<\varepsilon$$

כלומר k_0 תלוי רק ב- ε ולא ב- x ולכן $g_k(x)$ מתכנסת במידה שווה לפונקצית הגבול בקטע $[0,1]$.

משפט: אם $\{f_k(x)\}$ פונקציות רציפות ומתכנסות במ"ש בקטע I, אז פונקצית הגבול $f(x)$ רציפה ב- I.

לכן אם קיבלנו שפונקצית הגבול אינה רציפה בקטע I, בהכרח ש $\{f_k(x)\}$ אינה מתכנסת במ"ש בקטע.

למשל מכאן ש- $f_k(x)=x^k$ אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$ (ראה תרגיל קודם).

ההיפך לא נכון – תיתכן סדרת פונקציות שאינה מתכנסת במ"ש בקטע מסוים, ואף על פי כן פונקצית הגבול שלה רציפה באותו הקטע (דוגמה בהמשך).

משפט (מבחן ה- $\lim-\sup$): סדרת פונקציות $\{f_k(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ בקטע I,

אמ"ם: $\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{x\in I}\left\{|f_k(x)-f(x)|\right\}\right]=0$.

תרגיל: קבע התכנסות של $f_k(x)=\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)$ ב: א. $[a,b]$ $a>0$ ב. $(0,\infty)$.

פתרון: נבדוק התכנסות נקודתית: $\forall x_0>0:\quad \lim_{k\to\infty} f_k(x_0)=\lim_{k\to\infty}\ln\left(x_0+\frac{x_0^2}{k}\right)=\ln(x_0)$

כלומר הסדרה מתכנסת נקודתית בשני הסעיפים.

נבדוק התכנסות במ"ש. בסעיף א':

$$\sup_{x\in[a,b]}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in[a,b]}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\ln\left(1+\frac{b}{k}\right)\xrightarrow{k\to\infty}0$$

כלומר ההתכנסות היא במידה שווה.

עבור סעיף ב': $\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\infty\xrightarrow{k\to\infty}\neq 0$

כלומר כאן ההתכנסות אינה במ"ש (זו דוגמה לכך שרציפות הפונקציה הגבולית אינה גוררת התכנסות במ"ש).

תרגיל: בדוק התכנסות של סדרת הפונקציות: $f_k(x)=\frac{kx}{1+k^2x^2}$ בקטע $[0,1]$.

פתרון: נמצא את הפונקציה הגבולית: $\forall x\in[0,1]:\quad f(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{kx}{1+k^2x^2}=0$

קיבלנו פונקציה רציפה ולכן אנו לא יכולים בשלב הזה לשלול את ההתכנסות במ"ש של הסדרה.

נבדוק זאת עפ"י מבחן ה- $\lim-\sup$: $\sup_{x\in[0,1]}\left\{\left|f_k(x)-f(x)\right|\right\}=\sup_{x\in[0,1]}\left\{\frac{kx}{1+k^2x^2}\right\}$

ההפרש הוא פונקציה רציפה בקטע סגור ולכן ה- $\sup$ הוא גם מקסימום (ויירשטראס 2). נגזור ונאפס:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{nx}{1+k^2x^2}\right)=n\left(\frac{x}{1+k^2x^2}\right)'=k\cdot\frac{1+k^2x^2-x\cdot 2k^2x}{\left(1+k^2x^2\right)^2}=k\cdot\frac{1-k^2x^2}{\left(1+k^2x^2\right)^2}=0$$

נקודת הקיצון מתקבלת בנקודה: $1=k^2x^2\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{k}\in[0,1]$.

לפני $x=\frac{1}{k}$ הנגזרת חיובית ולאחריה שלילית כלומר זו נקודת מקסימום, והיא גלובלית.

מכאן: $$\sup_{x\in[0,1]}\left\{\frac{kx}{1+k^2x^2}\right\}=\left.\frac{kx}{1+k^2x^2}\right|_{x=\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{2}\neq 0$$

כלומר הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

הערה: באופן כללי, אין צורך לבדוק אם ישנן נק' קיצון נוספות, שכן אם המבחן תקף בנק' אחת, אז ודאי שיהיה תקף עבור נקודת הקיצון הגלובלית.

תרגיל: הוכח או הפרך:

$\{f_k(x)\}$ מתכנסת במ"ש בקטע I $\Leftarrow$ הפונקציה הגבולית $f(x)$ חסומה ב- I.

פתרון: לא נכון. למשל: $f_k(x)=\frac{1}{x}$ (סדרת פונקציות קבועה) בקטע $(0,1)$. פונקצית הגבול היא $\frac{1}{x}$ ואינה חסומה בקטע $(0,1)$.

חשבון אינפי 2 למדמ"ח

שיעור 8: טורים של פונקציות, תחום התכנסות, התכנסות בהחלט ובמ"ש, גזירה איבר-איבר, אינטגרציה איבר-איבר.

הגדרה: טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום A נקרא **מתכנס** (נקודתית) לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty} = \{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $S(x)$ לכל $x \in D$.

הגדרה: טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום A נקרא **מתכנס במ"ש** לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty} = \{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל- $S(x)$ ב- D.

מבחני התכנסות לטורים (להתכנסות במ"ש):

1. **קריטריון** $\lim - \sup$: טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום A מתכנס במ"ש לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = 0$.
2. **מבחן M ויירשטראס:** טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום A מתכנס במ"ש לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם קיים טור חיובי מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ של מספרים קבועים כך שלכל $x \in D$ מתקיים $|f_k(x)| \le a_k$.
3. **מבחן דיריכלה:** אם
   א. $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ טור חסום בקטע $[a,b]$, כלומר קיים קבוע $M > 0$ כך ש- $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le M$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a,b]$.
   ב. $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית מתכנסת במ"ש ב- $[a,b]$ ל- 0,
   אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$

4. משפט דיני: יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור של פונקציות **רציפות ואי שליליות** בקטע $[a,b]$. אם הטור מתכנס לפונקציה **רציפה** $S(x)$, אזי ההתכנסות היא במ״ש.

משפט: יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור של פונקציות רציפות המתכנס במ״ש בקטע $[a,b]$ ל- $S(x)$, אזי $S(x)$ רציפה.

הערה: משפט זה שימושי לשלילת התכנסות במ״ש.

טור פונקציות חשוב: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס לכל $-1 < x < 1$

תרגילים:

1. מצאו את תחומי ההתכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$

פתרון: נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+x^2)^n}{(n+1)(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$\frac{1}{1+x^2} < 1$ לכל $x \neq 0$ ולכן לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס לכל $x \neq 0$.

אם $x = 0$ מבחן דלאמבר נכשל. נציב $x = 0$ בטור ונקבל טור הרמוני מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

לסיכום הטור מתכנס לכל $x \neq 0$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$

פתרון: נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{(n+1)x}}{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right|\cdot\left|\frac{e^{(n+1)x}}{e^{nx}}\right| = e^x$$

$e^x < 1$ לכל $x < 0$ ולכן לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס לכל $x < 0$

אם $x > 0$ הטור מתבדר

אם $x=0$ מבחן דלאמבר נכשל ולכן נציב $x=0$ בטור ונקבל טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1}$

(ניתן להשוות עם טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ע"י מבחן ההשוואה הגבולי)

לסיכום הטור הנתון מתכנס לכל $x\le 0$.

ג. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$

פתרון: נשתמש במבחן דלאמבר $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(1-x)}{x^n(1-x)}\right|=|x|$

אם $|x|<1$ הטור מתכנס בהחלט

אם $|x|>1$ הטור מתבדר

אם $|x|=1$ מבחן דלאמבר נכשל- נבדוק התכנסות ע"י הצבה.

נציב $x=1$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}0=0$ טור מתכנס

נציב $x=-1$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2$ טור מתבדר (האיבר הכללי לא שואף לאפס)

לסיכום קיבלנו שהטור הנתון מתכנס בקטע $(-1,1]$.

2. האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ מתכנס במ"ש בקטעים הבאים:

א. $[a,b]\subseteq(-1,1)$

ב. $(-1,1)$

ג. $(0,3)$

פתרון: נמצא את סכום הטור:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k(1-x)=(1-x)+x(1-x)+...+x^{n-1}(1-x)=1-x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-x^n\right)=S(x)=\begin{cases}1 & -1<x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

נשתמש בקריטריון $\lim-\sup$ כדי לבדוק התכנסות במ"ש:

א. אם $[a,b]\subset(-1,1)$ נקבל:

$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|1-x^n-1\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|x^n\right|=0$ ולכן ההתכנסות היא **במ"ש**.

הערה: ניתן להוכיח התכנסות במ"ש גם לפי הגדרה:

יהי $\varepsilon>0$ צריך למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon$, כלומר $\left|1-x^n-1\right|=\left|x^n\right|<\varepsilon$.

אם $x=0$ אי השוויון האחרון מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן נניח ש- $x\neq 0$

$n\ln|x|<\ln\varepsilon$ ולכן $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\max\left(|a|,|b|\right)\right)}$.

הסבר: סימן אי השוויון התהפך, כי $\ln|x|<0$ עבור $x\neq 0,|x|<1$.

לסיכום ניתן לבחור $N=\left[\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\max\left(|a|,|b|\right)\right)}\right]\right]$.

ב. אם $-1<x<1$ נקבל

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-1<x<1}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-1<x<1}\left|1-x^n-1\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-1<x<1}\left|x^n\right|=1\neq 0$ ולכן ההתכנסות **לא במ"ש**

הערה: הוכחה דומה לסעיף א' לפי הגדרה מראה שלא ניתן לבחור N שלא יהיה תלוי ב- x, כי ככל שה- x יהיה יותר קרוב ל- 1 נצטרך לבחור N גדול יותר, כלומר ה- N תלוי לא רק ב- ε אלא גם ב- x ולכן ההתכנסות אינה במ"ש.

ג. לא בכל הנקודות של הקטע $(0,3)$ הטור מתכנס ולכן **אינו מתכנס במ"ש** בקטע הנ"ל

3. האם הטורים הבאים מתכנסים במ"ש בתחום ההתכנסות שלהם:

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{3/2}}$

פתרון: נמצא קודם את תחום ההתכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}}{\dfrac{x^n}{n^{3/2}}}\right|=|x|$$

לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס בהחלט כאשר $|x|<1$.

נבדוק התכנסות בקצוות בקטע.

נציב $x=1$ ונקבל טור מתכנס $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$

נציב $x=-1$ ושוב נקבל טור מתכנס $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ ולכן תחום ההתכנסות של הטור $[-1,1]$.

כדי להוכיח התכנסות במ"ש בתחום הנ"ל נשתמש במבחן M ווירשטראס:

$\left|\frac{x^n}{n^{3/2}}\right| \le \frac{1}{n^{3/2}}$ לכל $x\in[-1,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ טור חיובי מתכנס ולכן הטור הנתון מתכנס במ"ש ב- $[-1,1]$.

הערה: למעשה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$ זהו טור חזקות וכל טור חזקות מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו. (עדיין לא דיברנו על טורי חזקות בתרגול ולכן הארכנו בהוכחה...)

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}$

פתרון:

נמצא את תחום ההתכנסות $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}}{\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}}=\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{1+x^2}<1$ לכל $x\neq 0$ ולכן הטור מתכנס בהחלט (למעשה זהו טור של פונקציות אי שליליות)

אם $x=0$ נציב בטור ונקבל טור של אפסים שגם הוא מתכנס ולכן תחום ההתכנסות של הטור הנתון הינו $\mathbb{R}$.

נמצא את סכום הטור:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}=x^2\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right)$$

הסבר: זהו סכום של n איברים ראשונים של סדרה הנדסית בעלת איבר ראשון $a_1=x^2$ ומנה $q=\frac{1}{1+x^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right)=\begin{cases}1+x^2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}S(x)=\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)=1\neq 0=S(0)$, כלומר פונקצית הסכום אינה רציפה ולכן לפי משפט ההתכנסות **אינה במ"ש.**

שימו לב: בכל קטע שאינו מכיל $x=0$ ההתכנסות היא במ"ש, כי זהו טור של פונקציות אי שליליות ורציפות המתכנס לפונקציה רציפה.

4. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n$ מתכנס במ״ש ב- $[0,1]$.

הוכחה: נגדיר $f(x)=x(1-x)$ נמצא את נקודת המקסימום שלה בקטע $[0,1]$.

$f'(x)=1-2x=0$, $x=\frac{1}{2}$ ולכן הערך המקסימלי של הפונקציה בקטע הנ״ל הינו

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

$\left|x^n(1-x)^n\right|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ לכל $x\in[0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ זהו טור הנדסי מתכנס ולכן לפי מבחן M-

וירשטראס הטור הנתון מתכנס במ״ש בקטע הנ״ל.

5. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{n}$ מתכנס במ״ש ב- $[-1,3]$?