הגדרה: תהי G חבורה. סדרה תת נורמלית של G הינה

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = G$$

ה G_i לא בהכרח נורמלית ב- G, רק $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$

דוגמא:

$r=1$, $\{e\} \trianglelefteq G$

הגדרה: חבורה G נקראת פתירה (solvable) אם יש לה סדרה תת-נורמלית

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = G$$

כך שכל המנות G_i/G_{i-1} $(i=1,\dots,r)$ אבליות

דוגמא:

כל חבורה אבלית היא פתירה, $\{e\} \trianglelefteq G$

דוגמא:

S_4 פתירה

$$\underset{G_0}{\{e\}} \trianglelefteq \underset{G_1}{\{e,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}} \trianglelefteq \underset{G_2}{A_4} \trianglelefteq \underset{G_3}{S_4}$$

$$G_1/G_0 \cong \{e,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$G_2/G_1 \qquad \left|G_2/G_1\right| = \frac{|A_4|}{|G_1|} = \frac{12}{4} = 3$$

$G_3/G_2 \cong \mathbb{Z}_2$ כל חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית

תזכורת:

G חבורה, $g,h \in G$.

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$$

הגדרנו $G'=[G,G]$ (תת החבורה הנגזרת)
תת בחבורה הנוצרת על ידי $\{[g,h]:g,h\in G\}$

והוכחנו:

1) $[G,G]\trianglelefteq G$

2) תהי $N\trianglelefteq G$ אזי G/N אבלית $\iff [G,G]\leq N$

הגדרה: תהי G חבורה. הסדרה הנגזרת של G היא סדרה:

$$G^{(0)}=G\ ,\ G^{(k)}=[G^{(k-1)},G^{(k-1)}]\trianglelefteq G^{(k-1)}$$

טענה:

תהי G חבורה. אזי G פתירה $\iff$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $G^{(n)}=\{e\}$

הוכחה:

$\Rightarrow$) נניח כי $G^{(n)}=\{e\}$ אזי

$$G=G^{(0)}\trianglerighteq G^{(1)}\trianglerighteq\ldots\trianglerighteq G^{(r)}=\{e\}$$

נגדיר $G_i=G^{(r-i)}$. מקבלים סדרה תת נורמלית של G. המנות הינן:

$$G_i/G_{i-1}=G^{(r-i)}/G^{(r-i+1)}=G^{(r-i)}/[G^{(r-i)},G^{(r-i)}]$$

אבלית לפי התזכורת

$\Leftarrow$) נניח ש-G פתירה. לכן יש לה סדרה תת-נורמלית:

$$\{e\}=H_0\trianglelefteq H_1\trianglelefteq\ldots\trianglelefteq H_r=G$$

כך ש H_i/H_{i-1} אבלית לכל $1\leq i\leq r$.

נטען כי $G^{(i)}\leq H_{r-i}$ לכל $0\leq i\leq r$. אם זה נכון, אזי עבור

$i=r$ נקבל $G^{(r)}\leq H_0=\{e\}\Leftarrow G^{(r)}=\{e\}$

נותר להוכיח כי $G^{(i)}\leq H_{r-i}$ לכל $0\leq i\leq r$. באינדוקציה:

$i=0$: $G=G^{(0)}\leq H_r=G$

נניח שהטענה נכונה עבור $i-1$ כלומר $G^{(i-1)} \le H_{r-i+1}$

לפי ההנחה H_{r-i+1}/H_{r-i} אבלית. לכן לפי התזכורת

$$H_{r-i} \ge [H_{r-i+1}, H_{r-i+1}] \ge [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] = G^{(i)}$$

מסקנות:

1) אם G אבלית $\Leftarrow$ $G^{(1)}=\{e\}$ כי $[g,h]=e$ לכל $g,h\in G$.

קיבלנו הוכחה נוספת כי G פתירה

2) יהי $n\ge 5$. אזי A_n לא פתירה. וכן $[A_n,A_n]\trianglelefteq A_n$ וגם A_n פשוטה עבור $n\ge5$.

לכן, יש ל-A_n רק שתי תתי חבורות נורמליות $(A_n,\{e\})$. אבל A_n לא אבלית, לכן $[A_n,A_n]\ne\{e\}$. אז בהכרח $[A_n,A_n]=A_n$. לכן $A_n^{(i)}=A_n$ לכל $i\ge0$

לכן הסדרה הנגזרת של A_n לא מגיעה ל-$\{e\}$

הערה: תהי G חבורה פשוטה לא אבלית. אזי G לא פתירה (אותה הוכחה)

טענה:

תהי G חבורה פתירה. אזי כל תת-חבורה $H\le G$ גם פתירה

הוכחה:

$$H^{(1)}=[H,H]\le[G,G]=G^{(1)}$$

באינדוקציה נקבל $H^{(i)}\le G^{(i)}$ לכל $i\ge0$

אבל G פתירה ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $G^{(n)}=\{e\}$ ונקבל

$H^{(n)}\le G^{(n)}=\{e\} \Rightarrow H^{(n)}=\{e\} \Rightarrow$ H פתירה

תוצאה:

יהי $n\ge5$. אזי S_n לא פתירה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי S_n פתירה. לפי הטענה הקודמת, A_n פתירה. אבל הוכחנו כי A_n לא פתירה אם $n\ge5$ בסתירה

$f(x)=ax^2+bx+c$

השורשים הם:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

אין נוסחה ברדיקלים עבור פולינומים ממעלה ≥ 5 : 1824 - Abel

טענה:

תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. התנאים הבאים שקולים:

1) G פתירה

2) החבורות G/N, N שתיהן פתירות

הוכחה:

$(2 \Rightarrow 1$: נניח ש- G/N, N פתירות. לכן, יש לשתיהן סדרות תת נורמליות עם מנות אבליות:

$$\{e\}=N_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq N_r = N$$

$$\{e_{G/N}\}=L_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq L_s = G/N$$

לפי משפט האיזו' הרביעי, כל $L_i \leq G/N$ מתאימה לחבורה $N \leq k_i \leq G$ וההתאמה שומרת על הכלה ונורמליות ולכן

$$N=k_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq k_s = G$$

לפי משפט האיזומורפיזם השלישי: $L_i = k_i/N$, לכן

$$\underbrace{L_i/L_{i-1}}_{\text{אבלית. L סדרה תת נורמלית}} = \frac{k_i/N}{k_{i-1}/N} \cong k_i/k_{i-1}$$

לכן גם k_i/k_{i-1} אבליות. השרשור של שתי הסדרות התת נורמליות

$$\{e\}=N_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq N_r = N = k_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq k_s = G$$

זו סדרה תת נורמלית של G עם מנות אבליות ולכן G פתירה.

(ב⇐1): נניח ש G פתירה. N פתירה לפי טענה קודמת (N תת חבורה)

נשים לב כי הקומוטטור של שני איברים של G/N הוא:

$$[gN,hN]=(gN)(hN)(gN)^{-1}(hN)^{-1}=(ghg^{-1}h^{-1})N=[g,h]N$$

מקבלים: תהי $\varphi: G\to G/N,\ g\mapsto gN$ ההטלה הטבעית $\Leftarrow (G/N)^{(1)}=\varphi(G^{(1)})$

באינדוקציה: $(G/N)^{(n)}=\varphi(G^{(n)})$ לכל n טבעי

אם G פתירה, אזי קיים n כך ש $G^{(n)}=\{e\}$.

לכן $(G/N)^{(n)}=\varphi(\{e_G\})=\{e_{G/N}\}$ ולכן G/N פתירה.

משפטים:

1) (Burnside) יהיו p,q ראשוניים. תהי G חבורה מסדר p^aq^b. אזי G פתירה

2) (Feit - Thompson 1950's) תהי G חבורה מסדר אי זוגי אזי G פתירה

3) (Thompson 1963) תהי G חבורה. נניח שלכל שני איברים $a,b\in G$ תת החבורה $\langle a,b\rangle$ פתירה. אזי G פתירה.

הגדרה: תהי G חבורה. $H,K\leq G$ שתי תתי קבוצות

$[H,K]$ היא תת החבורה הנוצרת על ידי כל הקומוטטורים

$[h,k]$ $h\in H, k\in K$

טענה:

תהי G חבורה, $H\trianglelefteq G$, $K\trianglelefteq G$ תת חבורות נורמליות. אזי

1) $[H,K]\leq H\cap K$

2) $[H,K]\trianglelefteq G$

הוכחה:

1) יהיו $h\in H$, $k\in K$ אזי $[h,k]=\underbrace{hkh^{-1}}_{\in K}\underbrace{k^{-1}}_{\in K}$

כי $K\trianglelefteq G$

לכן $[h,k]\in K$. באופן דומה $[h,k]=\underbrace{h}_{\in H}\underbrace{kh^{-1}k^{-1}}_{\in H}$

לכן $[h,k]\in H\cap K$ לכל $h\in H$, $k\in K$. כלומר ש $[H,K]\leq H\cap K$

ב) יהי $g\in G$. אזי

$g[h,k]g^{-1}=[ghg^{-1},gkg^{-1}]\in[H,K]$

הצמדה ב-g היא הומו׳, לכן הצמדה של מכפלה של קומוטטורים גם שייכת ל-$[H,K]$

הגדרה: תהי G חבורה. הסדרה המרכזית התחתונה היא הסדרה

$G=\gamma_1 G\trianglerighteq\gamma_2 G\trianglerighteq\dots$

כאשר $\gamma_1 G=G$, $\gamma_n G=[G,\gamma_{n-1}G]$

מסקנות:

$\gamma_2 G=[G,G]=G^{(1)}\trianglelefteq G$ לפי הטענה, $\gamma_3 G=[G,\gamma_2 G]\trianglelefteq G$ $(\gamma_2 G\leq\gamma_1 G)$ באינדוקציה $\gamma_n G\trianglelefteq G$ לכל n

הגדרה: תהי G חבורה. G נקראת נילפוטנטית (nilpotent) אם קיים n טבעי כך ש $\gamma_n G=\{e\}$. במקרה הזה, המספר c הכי קטן כך ש $\gamma_{c+1}G=\{e\}$ נקרא מעלת הנילפוטנטיות של G

דוגמאות:

G נילפוטנטית ממעלה 1 $\iff$ $[G,G]=\gamma_2 G=\{e\}$ G אבלית.

G נילפוטנטית ממעלה 2 $\iff$ G לא אבלית, אבל $[G,G']=[G,\gamma_2 G]=\gamma_3 G=\{e\}$ $\iff$ $G'\leq Z(G)$

טענה:

כל חבורה נילפוטנטית היא פתירה.

הוכחה:

נטען ש $G^{(n)}\leq\gamma_{n+1}G$ לכל $n\in\mathbb{N}$. אכן: $n=0$ $G^{(0)}=G=\gamma_1 G$

אם ידוע ש $\gamma_n G \geq G^{(n-1)}$, אזי

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \leq [G, G^{(n-1)}] \leq [G, \gamma_n G] = \gamma_{n+1} G$$

ולכן $G^{(n)} \leq \gamma_{n+1} G$ לכל $n \in \mathbb{N}$

G נילפוטנטית $\Leftarrow$ קיים c כך ש $\gamma_{c+1} G = \{e\} \Leftarrow G^{(c)} = \{e\} \Leftarrow G$ פתירה

טענה:

תהי $f: G \to H$ הומ׳. אזי $f(\gamma_n G) \leq \gamma_n H$ לכל $n \in \mathbb{N}$

הוכחה:

באינדוקציה על n. אם $n=1$ $f(G) \leq H$

נניח ש $f(\gamma_{n-1} G) \leq \gamma_{n-1} H$

יהיו $g \in G$, $x \in \gamma_{n-1} G$. אזי

$$f([g,x]) = f(gxg^{-1}x^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1}f(x)^{-1} = [f(g), f(x)] \in [H, \gamma_{n-1} H] = \gamma_n H$$

כל איבר $a \in \gamma_n G$ הינו מכפלה של קומוטטורים

$$a = [g_1, x_1] \dots [g_r, x_r] \qquad (g_1, \dots, g_r \in G, \quad x_1, \dots, x_r \in \gamma_{n-1} G)$$

$$f(a) = f([g_1, x_1]) \dots f([g_r, x_r]) \in \gamma_n H$$

טענה:

יהי p ראשוני, תהי G חבורה מסדר $|G| = p^n$. אזי G נילפוטנטית

הוכחה:

באינדוקציה על n. נוכיח שכל חבורה מסדר p^n היא נילפוטנטית מסדר לכל היותר $n-1$. אם $n=1$ או $n=2$, כבר הוכחנו כי G אבלית ולכן נילפ׳ ממעלה 1.

נניח שהטענה נכונה לכל חבורה מסדר p^k כאשר $k<n$

לכל חבורה G מתקיים $Z(G) \trianglelefteq G$.

לכן $|G/Z(G)| < |G|$. זה אומר ש $|G/Z(G)| = p^k$ עבור $0 \leq k < n$

מהנחת האינדוקציה $\gamma_k (G/Z(G)) = \{e\}$. נתבונן בהעתקה הטבעית:

$f: G \to G/Z(G)$
$g \mapsto gZ(G)$

לפי הטענה הקודמת $f(\gamma_k G) \le \gamma_k(G/Z(G)) = \{e\}$

לכן, $\gamma_k G \le \ker f = Z(G)$. ולכן $\gamma_{k+1}(G) = [G, \gamma_k G] \le [G, Z(G)] = \{e\}$

לכן G נילפוטנטית ממעלה לכל היותר $k \le n-1$

משפט:

סה״כ יש 49,487,365,422 חבורות מסדר 1024 עד כדי איזומורפיזם

יש 423,164,062 חבורות מסדר בין 1 ל- 2015 אבל לא 1024 (עד כדי איזו׳)

מסקנה:

מתוך החבורות מסדר ≤ 2015, 99.15% מתוכן הינן מסדר $2^{10}=1024$