תרגיל 8

29 ביוני 2018

פתרו את המד"ר הבא:

1. $y' = -\frac{x+y-2}{x-y+4}$.

פתרון:

נבצע הצבה: $x^* = x+t, y^* = y+s$.

במצב כזה, $(y^*)' = y'$, ונקבל:

$$y^*{}' = -\frac{x^*+y^*-t-s-2}{x^*-y^*-t+s+4}$$

נבחר t, s כך שיתקיים:

$$\begin{cases} -t-s-2=0 \\ -t+s+4=0 \end{cases}$$

כלומר $t=1, s=-3$. כעת, המשוואה היא:

$$y^*{}' = -\frac{x^*+y*}{x^*-y^*}$$

נציב $z = \dfrac{y^*}{x^*}$. $zx^* = y^*, y^*{}' = z'x^* + z$, ולכן:

$$z + x^*z' = -\frac{1+z}{1-z}$$

לפיכך:

$$x^*\frac{dz}{dx^*} = \frac{1+z}{1-z} - z = -\frac{1+z^2}{1-z}$$

לכן:

$$-\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{dx^*}{x^*}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים:

$$-\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{dx^*}{x^*}$$

את האינטגרל מימין נחלק לשני אינטגרלים:

$$-\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = -\int \frac{1}{1+z^2}dz + \int \frac{z}{1+z^2}dz = -\arctan z + \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)$$

כלומר:

$$-\arctan z + \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) = \ln\left|Cx^*\right|$$

נחזור ל-v:

$$-\arctan \frac{y^*}{x^*} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y^*}{x^*}\right)^2\right) = \ln\left|Cx^*\right|$$

נחזור ל-y,x:

$$-\arctan \frac{y-3}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right) = \ln\left|C\left(x+1\right)\right|$$