תרגיל 9 מבוא לתורת החבורות

שאלה 9.1 מצאו את החבורות הבאות: (הן כולן ציקליות ולכן איזומורפיות ל $\mathbb{Z}_k$ כלשהוא, השאלה היא מהו k?)

1. $\mathbb{Z}_{100}/\langle 7\rangle$.
פתרון: 7 זר ל 100 ולכן הוא יוצר. כלומר $\langle 7\rangle = \mathbb{Z}_{100}$ ולכן
$$\mathbb{Z}_{100}/\langle 7\rangle = \mathbb{Z}_{100}/\mathbb{Z}_{100} = \{e\}$$
כלומר המנה הזאת היא החבורה הטריויאלית (החבורה בגודל 1) או אם רוצים $\mathbb{Z}_1$.

2. $\mathbb{Z}_{100}/\langle 15\rangle$.
פתרון: נשים לב ש
$$\mathrm{o}(15) = \mathrm{o}(1^{15}) = \frac{100}{\gcd(15,100)} = \frac{100}{5} = 20$$
כלומר 15 יוצר חבורה בגודל 20 ולכן
$$\mathbb{Z}_{100}/\langle 15\rangle \simeq \mathbb{Z}_5$$

3. $\mathbb{Z}_{25}/\langle 15\rangle$.
פתרון: כמו בסעיף הקודם
$$\mathrm{o}(15) = \mathrm{o}(1^{15}) = \frac{25}{\gcd(15,25)} = \frac{25}{5} = 5$$
ולכן
$$\mathbb{Z}_{25}/\langle 15\rangle \simeq \mathbb{Z}_5$$

שאלה 9.2 תהי G חבורה. תהי $K \lhd G$ תת חבורה נורמלית מאינדקס 14. תהי $H \leq G$ תת חבורה כך ש $K \leq H \leq G$ ו H **לא** נורמלית. מהו האינדקס $[G:H]$? (במידת הצורך, העזרו בפתרון הבוחן).
פתרון: לפי משפט ההתאמה
$$H/K \leq G/K$$
היא תת חבורה **שאינה נורמלית**. הסדר של G/K הוא 14. לכן הסדר של
$$H/K$$
הוא 2 (כמו בבוחן - לפי לגרנז' הסדר הוא אחד מבין $\{1,2,7,14\}$ אבל אם הסדר הוא 1 או 14 אז באופן טריויאלי התת חבורה היא נורמלית כי היא החבורה בגודל 1 או הכל. אם הסדר הוא 7 אז היא נורמלית כי האינדקס הוא 2)
ולכן האינדקס של H/K בתוך G/K הוא 7. לפי משפט האיזומורפיזם השלישי
$$[G:H] = [G/K : H/K] = 7$$
וזה מה שחיפשנו

שאלה 9.3 1. הוכיחו את הטענה הבאה, שהשתמשנו בה היום בתרגול:
תהי G חבורה ויהיו $a,b\in G$ שני איברים מתחלפים $ab=ba$. עוד נתון כי $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$. הוכיחו כי

$$\mathrm{o}(ab)=\mathrm{lcm}(\mathrm{o}(a),\mathrm{o}(b))$$

פתרון: נסמן $l=\mathrm{lcm}(\mathrm{o}(a),\mathrm{o}(b))$. אז בגלל ש $ab=ba$

$$(ab)^l=a^lb^l$$

בגלל ש $l\mid a$ ו $l\mid b$ נקבל ש

$$a^lb^l=e$$

נותר להוכיח ש l הוא המינימלי כנ"ל. נניח שיש איזשהוא k כך ש

$$(ab)^k=e$$

אבל

$$a^kb^k=e$$

ולכן

$$a^k=b^{-k}$$

עכשיו לפי הנתון

$$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$$

אבל

$$a^k\in\langle a\rangle$$

והיות ש

$$a^k=b^{-k}$$

אז גם

$$a^k\in\langle b\rangle$$

ולכן

$$a^k=b^{-k}=e$$

ולכן

$$\mathrm{o}(a)\mid k,\quad \mathrm{o}(b)\mid k$$

ולכן

$$\mathrm{lcm}(\mathrm{o}(a),\mathrm{o}(b))=l\mid k$$

וזה מוכיח ש l הוא הסדר של ab.

2. הסיקו כי אם $a,b \in G$ איברים מתחלפים $ab = ba$ מסדרים זרים (כלומר $\gcd(\mathrm{o}(a),\mathrm{o}(b)) = 1$) אז

$$\mathrm{o}(ab) = \mathrm{o}(a)\,\mathrm{o}(b)$$

פתרון: נניח $\mathrm{o}(a) = k$ ו $\mathrm{o}(b) = r$ הנתון אומר ש

$$\gcd(a,b) = 1$$

היות ש

$$|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| \mid |\langle a\rangle| = k$$

ו

$$|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| \mid |\langle b\rangle| = r$$

נקבל ש

$$|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 1$$

כלומר

$$|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = \{e\}$$

ולכן לפי התרגיל הקודם

$$\mathrm{o}(ab) = \mathrm{lcm}(\mathrm{o}(a),\mathrm{o}(b)) = \frac{\mathrm{o}(a)\,\mathrm{o}(b)}{\gcd(\mathrm{o}(a),\mathrm{o}(b))} = \mathrm{o}(a)\,\mathrm{o}(b)$$

שאלה 9.4 נתונה תמורה ב S_9

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. רשמו את σ כמכפלת מחזורים זרים.
פתרון: $\sigma = (146)(285)(39)$
2. מצאו את הסדר של σ.
פתרון: $\mathrm{o}(\sigma) = \mathrm{lcm}(3,3,2) = 6$
3. מצאו את הסדר של σ^{14}.
פתרון:

$$\mathrm{o}(\sigma^{14}) = \frac{\mathrm{o}(\sigma)}{\gcd(14,\mathrm{o}(\sigma))} = \frac{6}{\gcd(14,6)} = \frac{6}{2} = 3$$

4. האם σ זוגית או אי זוגית?
פתרון:

$$\sigma = (14)(46)(28)(85)(39)$$

יש בפירוק 5 חילופים ולכן σ אי זוגית.

5. כתבו את σ^{-1} ואת σ^2 כמכפלת מחזורים זרים.
פתרון: עבור σ^{-1}אפשר פשוט להפוך את המעגלים= המחזורים

$$\sigma^{-1} = (641)(582)(93)$$

עבור σ^2 אפשר לחשב

$$\sigma^2 = (164)(258)$$

שאלה 9.5 ב"מצאו תת חבורה" הכוונה היא שמספיק למצוא יוצרים לתת חבורה כנ"ל. (אבל צריך להוכיח שהיא עונה על הדרישות).

1. מצאו תת חבורה מסדר 20 של S_{12}.
פתרון: ניקח את

$$\sigma = (12345)(6789)$$

לפי מה שלמדנו

$$\mathrm{o}(\sigma) = \mathrm{lcm}(5, 4) = 20$$

2. מצאו תת חבורה מסדר 20 של A_{12}.
פתרון: אי אפשר לקחת את אותו σ ממקודם כי הוא אי זוגי אבל אפשר לקחת את

$$\tau = (12345)(6789)(10\ \ 11)$$

שזו תמורה זוגית ו

$$\mathrm{o}(\tau) = \mathrm{lcm}(5, 4, 2) = 20$$

שאלה 9.6 הוכיחו כי קבוצת המעגלים מאורך 3 יוצרת את A_4.
פתרון: ב A_4 יש

$$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$$

איברים

נסתכל על כל מהעגלים באורך 3:

$$(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)$$

זאת כבר קבוצה בגודל 8 והיא בוודאי פורשת את id. נותר רק לוודא שהיא פורשת את שאר 3 האיברים של A_4 שהם:

$$(12)(34)=(143)(123)$$

$$(13)(24)=(142)(132)$$

$$(14)(32)=(123)(143)$$

ובזה סיימנו.