אינפי 3

תרגול 7

הערה/תיקון:

שארית פיאנו:

כאשר נפתח את טור טיילור עד סדר m, השארית תהיה:

$$o\left(\|x-a\|^{m}\right)$$

משפט הפונקציה ההפוכה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהי f פונקציה המוגדרת על הקבוצה, גזירה ברציפות.

תהי $a \in A$ עבורה $|J_f(a)| \neq 0$.

אזי, קיימת סביבה U של a $(U \subset A)$ כך שהקבוצה $f(U)$ גם פתוחה.

בנוסף, f מעתיקה את U חח"ע על V ו-$U \to V : f^{-1}$ גם גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}$$

לכל $x \in U$..

במילים אחרות, אם f גזירה ברציפות והיעקוביאן לא מתאפס אז f הפיכה מקומית.

במצב כזה, מטריצת יעקובי של ההופכית היא ההופכית של מטריצת יעקובי.

תרגיל:

תהי $f\left(x,y,z\right)=\left(e^{x}\sin z,e^{y}\cos z,e^{z}xy\right)$

הוכיחו כי f הפיכה מקומית בנקודה $(0,1,0)$, ומצאו את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0,e,0)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את מטריצת היעקובי של f:

$$\begin{pmatrix} e^{x}\sin z & 0 & e^{x}\cos z \\ 0 & e^{y}\cos z & -e^{y}\sin z \\ e^{z}y & e^{z}x & e^{z}xy \end{pmatrix}$$

נשים לב כי f אכן גזירה ברציפות

בנקודה $(0,1,0)$ שלנו נקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הפיכה ולכן הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

כלומר, $J_f\left(0,1,0\right) \neq 0$ ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה, נקבל ש$-f$ הפיכה מקומית בסביבת $(0,1,0)$.

מתקיים: $f\left(0,1,0\right) = \left(0,e,0\right)$.

כעת, מטריצת היעקובי של f^{-1} היא ההופכית של מטריצת היעקובי של f, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר פונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x+2x^{2}\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

הוכיחו כי f אינה חח"ע בכל קטע פתוח המכיל את 0.
הדרכה: הוכיחו כי לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{2}{\left(4k+1\right)\pi}\right)>f\left(\frac{2}{\left(4k+3\right)\pi}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)>f\left(\frac{2}{\left(4k+3\right)\pi}\right)$$

איזה תנאי של משפט הפונקציה ההפוכה אינו מתקיים?

<u>פתרון:</u>

נוכיח את אי־השיוויון שבהדרכה:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)=\frac{2}{(4k+1)\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{(4k+1)\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)=\frac{2}{(4k+3)\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2\sin\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{2}{(4k+3)\pi}-2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2$$

ומכיוון שמתקיים:

$$\frac{2}{(4k+3)\pi}<\frac{2}{(4k+1)\pi}$$

$$-2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2<2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2$$

נקבל שאכן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)<f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)$$

כמו כן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)=\frac{2}{(4k+4)\pi}+2\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)^2\sin\left(2k\pi+\frac{4\pi}{2}\right)=\frac{2}{(4k+4)\pi}$$

כלומר נותר להוכיח ש:

$$\frac{2}{(4k+4)\pi}>\frac{2}{(4k+3)\pi}-2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2$$

עם קצת אריתמטיקה נקבל:

$$16k+16>(4k+3)\pi$$

ואנו יודעים שפונקציה רציפה וחח"ע היא מונוטונית (חשבו למה), ולכן הפונקציה שלנו אינה חח"ע.

התנאי שאינו מתקיים הוא גזירות ברציפות.

אם נחשב את הנגזרת של f נקבל:

$$f'(x)=\begin{cases}1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

והגבול:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים, ולכן הנגזרת אינה רציפה.

הפונקציה הסתומה:

הגדרה:

תהי $F(x,y)$ מוגדרת בתחום D ויהי $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ מלבן ב-D.
נאמר שהמשוואה $F(x,y) = 0$ מגדירה את y כפונקציה סתומה של x במלבן Δ, אם לכל $a \le x \le b$ יש y יחיד בקטע $[c,d]$ כך ש:

$$F(x,y) = 0$$

הקדמה:

נתונה המשוואה $y+\frac{1}{2}siny-x=0$. האם משוואה זו מגדירה את y פונקציה של x?

נבודד דווקא את x כפונקציה של y:

$$x=y+\frac{1}{2}siny$$

זו פונקציה גזירה לכל y ומתקיים:

$$x'=1+\frac{1}{2}cosy>0$$

והנגזרת עולה לכל y. כלומר, זו פונקציה הפיכה, ולכן יש לה פונקציה הפוכה שמגדירה את y כפונקציה של x.

משפט הפונקציה הסתומה - משוואה אחת ונעלם אחד:

נתונה המשוואה $F(x,y)=0$ כאשר F מוגדרת בסביבה D של הנקודה (x_0,y_0).

אם $F(x,y),F_x(x,y),F_y(x,y)$ רציפות ב$-D$ ואם $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

אז קיים מלבן:

$$\Delta=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\epsilon\}$$

כך שהמשוואה הנ"ל מגדירה את y כפונקציה סתומה של x ונסמן $y=f(x)$.

כמו כן, $y_0=f(x_0)$ ולכל x במלבן $F_y(x,f(x))\neq 0$ והפונקציה $y=f(x)$ גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$\frac{df}{dx}(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

תרגיל:

נתונה המשוואה $x^y - y^x - y = 0$. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה $(2,1)$? אם כן, חשבו את $y'(2)$.

פתרון:

נגדיר $F(x,y) = x^y - y^x - y$.

F רציפה בסביבת הנקודה, הנגזרות הן:

$$F_x = yx^{y-1}-y^x lny \qquad F_y = x^y lnx - xy^{x-1} - 1$$

רציפות, ובנוסף:

$$F_y(2,1) = 2ln2 - 3 \neq 0$$

לכן תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן y מוגדרת כפונקציה של x בסביבות הנקודה $(2,1)$.

כעת, לפי המשפט:

$$y'(2) = -\frac{F_x(2,1)}{F_y(2,1)} = \frac{1}{3 - ln4}$$

משפט הפונקציה הסתומה ב$n-$ משתנים:

תהי משוואה $F(x_1, x_2 \ldots, x_n, y) = 0$ כאשר F פונקציה של $n+1$ משתנים המוגדרת בסביבה D של הנקודה $A = (x_1^0, x_2^0 \ldots, x_n^0, y^0)$.

נניח שמתקיים $F(A) = 0$ ובנוסף $F \in C^1$ וגם $F_y(A) \neq 0$ אז קיימת תיבה n מימדית $\left|x_i - x_i^0\right| < \delta_i$ כך שהמשוואה מגדירה בסביבה זו את y כפונקציה סתומה של שאר המשתנים:

$$y = y(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

בנוסף, y גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}$$

<u>תרגיל:</u>

נתונה המשוואה:

$$y^3 + xz + y^2 + e^z - 3 = 0$$

הוכיחו כי המשוואה מגדירה פונקציה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,1,0)$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר:

$$F(x,y,z) = y^3 + xz + y^2 + e^z - 3$$

הפונקציה הנ"ל היא סכום של פונקציות אלמנטריות לפי שלושת המשתנים ולכן $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

אכן מתקיים: $F(1,1,0)=0$, וכן:

$$F_z(1,1,0) = x + e^z|_{(1,1,0)} = 2 \neq 0$$

ולכן תנאי המשפט מתקיימים, והמשוואה אכן מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$

בסביבת הנק' (1,1,0)

תרגיל:

בהמשך לתרגיל הקודם, חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ ישירות מהמשוואה; השוו את התוצאה עם הגזירה לפי משפט הפונקציה הסתומה.

פתרון:

נתבונן במשוואה המקורית: $y^3+x\cdot z\left(x,y\right)+y^2+e^{z(x,y)}-3=0$, נגזור אותה לפי x ונקבל:

$$z\left(x,y\right)+x\cdot z_x\left(x,y\right)+z_x\left(x,y\right)\cdot e^{z(x,y)}=0$$

כלומר:

$$z_x=-\frac{z}{x+e^z}$$

באופן דומה נגזור את המשוואה לפי y ונקבל:

$$z_y=-\frac{3y^2+2y}{x+e^z}$$

מצד שני, לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z}{x + e^z}$$

והתוצאה אכן זהה. כך גם לגבי z_y.

תרגיל:

תהי $F(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, ונניח כי בסביבה D של נקודה (x_0,y_0,z_0) המשוואה מגדירה 3 פונקציות:

$$x = x(y,z), y = y(x,z), z = z(x,y)$$

חשבו את: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$.

פתרון:

לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1$$

משפט הפונקציה הסתומה למערכת של משוואות:

נתבונן ב-m משוואות עם $n+m$ נעלמים:

$$F_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0, 1\le i\le m$$

נניח שכל הפונקציות F_i גזירות ברציפות לפי כל המשתנים בסביבה D של נקודה $A=(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$.

כמו כן, נניח ש-$F_i(A)=0$ לכל i והיעקוביאן בנקודה A שונה מ-0.

אזי, קיימת סביבה U של A כך שבסביבה זו המערכת מגדירה m פונקציות גזירות ברציפות:

$$y_k(x_1,\dots,x_n), 1\le k\le m$$

המשך המשפט:

והנגזרת לפי משתנה מסויים נתונה ע"י:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = -\frac{\left|\frac{\partial(F_1,\dots.F_m)}{\partial(y_1,\dots x_j\dots y_m)}\right|}{\left|\frac{\partial(F_1,\dots.F_m)}{\partial(y_1,\dots y_m)}\right|}$$

כאשר המטריצה $\frac{\partial(F_1,\dots.F_m)}{\partial(y_1,\dots x_j\dots y_m)}$ היא המטריצה $\frac{\partial(F_1,\dots.F_m)}{\partial(y_1,\dots y_m)}$ בה החלפנו את עמודת הנגזרות לפי y_k בעמודת הנגזרות לפי x_j.

__תרגיל:__

נתבונן במערכת:

$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$

$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$$

1. הוכיחו כי המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u(x,y)$ ו־$v(x,y)$, כך ש: $u(1,2) = v(1,2) = 0$.

__פתרון:__

נבדוק שהמערכת מקיימת את תנאי המשפט.

נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,u,v) = (F_1, F_2) = (xe^{u+v} + 2uv - 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x)$$

הנקודה שלנו היא $(1,2,0,0)$.

אכן מתקיים: $f(1,2,0,0)=(0,0)$.

הנגזרות לפי כל משתנה של F_1, F_2 גזירות ברציפות, ומתקיים:

$$J_f(1,2,0,0)=\begin{vmatrix} (F_1)_u & (F_1)_v \\ (F_2)_u & (F_2)_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u \\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}$$

ובנקודה שלנו נקבל:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

ולכן כל תנאי המשפט מתקיימים, ולכן המערכת מגדירה פונקציות $u(x,y)$ ו־$v(x,y)$ גזירות ברציפות.

מכיוון שהן גזירות ברציפות הן בוודאי דיפרנציאביליות.

2. מצאו את $du(1,2)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרות החלקיות של u לפי שני המשתנים. לפי x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} (F_1)_x & (F_1)_v \\ (F_2)_x & (F_2)_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (F_1)_u & (F_1)_v \\ (F_2)_u & (F_2)_v \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} e^{u+v} & xe^{u+v} + 2u \\ -2 & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}}{-3}$$

ובנקודה שלנו:

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = 0$$

לפי y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}(F_1)_y & (F_1)_v\\ (F_2)_y & (F_2)_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(F_1)_u & (F_1)_v\\ (F_2)_u & (F_2)_v\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^{u+v}+2u\\ e^{u-v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}}{-3}$$

ובנקודה שלנו:

$$=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{1}{3}$$

ולכן:

$$du(1,2)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}(1,2)\cdot dy=-\frac{1}{3}dy$$