

פתרון תרגיל 10 אינפי 4

10 ביוני 2015

1. א. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} -2x & 2y \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(0, 0) \in M$ הדרגה היא 0 ולכן M אינה יריעה.

ב. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} -2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 1 אלא אם $(x, y) = (0, 0)$ אך נקודה זו לא נמצאת ב- M ולכן M יריעה.

נסמן: $\Omega = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ ונגדיר פונקציות:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 : \Omega \rightarrow M$$

$$\varphi_1(t, s) = (t, \sqrt{1-t^2}, s)$$

$$\varphi_2(t, s) = (t, -\sqrt{1-t^2}, s)$$

$$\varphi_3(t, s) = (\sqrt{1-t^2}, t, s)$$

$$\varphi_4(t, s) = (-\sqrt{1-t^2}, t, s)$$

ואטלס מתאים הוא: $\{(\Omega, \varphi_i)\}_{i=1}^4$.

ג. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(0, 0, 0) \in M$ הדרגה היא 0 ולכן M אינה יריעה.

ה. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 2 חוץ מבנקודות מהצורה $(0, y, 0)$. אין נקודות כאלו ב- M המקיימות את

שתי המשוואות, ולכן M יריעה.

נסמן $\Omega = (-1, 1)$ ונגדיר פונקציות:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 : \Omega \rightarrow M$$

$$\varphi_1(t) = (t, 0, \sqrt{1-t^2})$$

$$\varphi_2(t) = (t, 0, -\sqrt{1-t^2})$$

$$\varphi_3(t) = (\sqrt{1-t^2}, 0, t)$$

$$\varphi_4(t) = (-\sqrt{1-t^2}, 0, t)$$

ואטלס מתאים הוא: $\{(\Omega, \varphi_i)\}_{i=1}^4$.

ו. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 2 למעט נקודות מהצורה $(x, 0, 0)$. אין נקודות כאלו ב- M המקיימות את

שתי המשוואות, ולכן M יריעה.

נגדיר פונקציות $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$ ע"י:

$$\varphi_1(t) = (0, t, 1)$$

$$\varphi_2(t) = (0, t, -1)$$

ואטלס מתאים הוא $\{(\mathbb{R}, \varphi_i)\}_{i=1}^2$.

ז. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} -y & -x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 2 למעט נקודות מהצורה $(0, 0, z)$. יש נקודה כזו ב- M , ולכן M אינה יריעה.

ח. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 2 למעט נקודות מהצורה (x, x, x) . אין נקודות כאלו ב- M המקיימות את שתי המשוואות, ולכן M יריעה.

זהו מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 3, ועליו $z = -x - y$.
חשבו על אטלס מתאים.

2. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 2 למעט נקודות מהצורה (x, x, x) .
אם נקודה כזו נמצאת ב- M_a , אז $x = \frac{a}{3}$ ולכן צריך להתקיים:

$$3 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 9$$

כלומר $a = \pm\sqrt{27}$.

הקבוצה שלנו היא חיתוך של מישור ושל ספירה, ולכן אפשר לסכם ולומר:

א. עבור $-\sqrt{27} < a < \sqrt{27}$ הקבוצה M_a היא יריעה.

ב. עבור $a = \pm\sqrt{27}$ הקבוצה M_a היא נקודה.

ג. עבור $a > \sqrt{27}$ או $-\sqrt{27} < a$ הקבוצה היא קבוצה ריקה.