תרגיל 2 אינפי 3

הערה: בתרגול של דורון קראנו ל"נקודת גבול" "נקודת הצטברות". הביטוי $\lim A$ שווה לביטוי A' בספר של קנטורוביץ' – קבוצת נקודות הגבול.

1) האם הקבוצות הבאות סגורות? פתוחות? חסומות? מצאו את קבוצת נקודות הגבול של כל קבוצה.

א. $A = \{(x,y) | x > y\}$ ב - $\mathbb{R}^2$.

ב. $B = \{(x,y) | x^2 + y^2 \geq 25, x^2 - y^2 > 1\}$ ב - $\mathbb{R}^2$.

2) תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצות. נסמן ב - $\lim A$, $\lim B$ את קבוצת נקודות הגבול שלהן בהתאמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\lim A \cap \lim B = \lim(A \cap B)$

ב. $\lim A \cup \lim B = \lim(A \cup B)$

ג. $\lim A \times \lim B = \lim(A \times B)$

ד. $\lim A \setminus \lim B = \lim(A \setminus B)$

ה. $\lim A \Delta \lim B = \lim(A \Delta B)$

3) תהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, ויהיו אוסף של קבוצות סגורות $\{A_i\}_{i\in I}$ שאיחודן הוא X. נניח שלכל אוסף סופי $\{A_{i_k}\}_{k=1}^m$ מתקיים $\bigcap_{k=1}^m A_{i_k} \neq \emptyset$, הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

4) תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$, נסמן את הפנים של A ב- A°. הוכיחו ש $A^\circ = (A^\circ)^\circ$.

5) תהי $X \subseteq \mathbb{R}^s$ קבוצה קומפקטית, ויהי כיסוי פתוח סופי $\{A_k\}_{k=1}^m$ של X. (כל A_k פתוחה ו- $\bigcup_{k=1}^m A_k = X$).

הוכיחו שישנו $r > 0$ עבורו לכל $x \in X$ הכדור הפתוח $B(x,r)$ מוכל באחד ה- A_k–ים.
בכתיב מתמטי: $\exists r > 0 : \forall x \in X : \exists k = 1, \dots, m : B(x,r) \subseteq A_k$.

רמז: לכל x הגדירו

$$R(x) = \sup\{\delta > 0 : \exists k = 1, \dots, m : B(x,r) \subseteq A_k B(x,\delta) \subseteq A_k\}$$

הראו שהטענה שלנו שקולה ל "ישנו $r > 0$ עבורו $R(x) \geq r$ לכל x"
הניחו בשלילה שזה לא נכון, והביטו בסדרה $x^1, x^2, x^3, \dots \in X$ עבורה $R(x^n) \to 0$.