

# תרגיל 7 – אלגברה מופשטת 1

1. ענו על הסעיפים הבאים:

1.1. מצאו  $\sigma \in S_6$  כך ש  $\sigma^{-1} = (14)(35)$  /  $\sigma(12)(34)$

1.2. כמה תמורות  $\sigma \in S_8$  יש כך ש  $\sigma^{-1} = (1234)(567)$  /  $\sigma(1246)(378)$ ?

1.3. מצאו את כל מחלקות הצמידות ב  $S_4$  ואת הגודל של כל מחלקה.

2. תהי  $G$  חבורה (אינסופית). נסמן ב  $\Delta(G)$  את קבוצת האיברים שמחלקת הצמידות שלהם סופית. הוכיחו כי  $\Delta(G)$  היא תת חבורה נורמלית של  $G$ .

3. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1. כמה איברים ב  $S_7$  מתחלפים עם  $a = (125)$ ?

3.2. תהי  $H \leq S_9$  תת חבורה הנוצרת על ידי  $(123)(789)$  ו- $(345)$ . נניח ש- $H$

פועלת (הפעולה הטבעית) על  $X = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ . כמה מסלולים יש

לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1. תהא  $G$  חבורה ונתון שקיים  $g \in G, g \neq 1$  כך שמחלקת הצמידות שלו

מכילה שני איברים. הוכיחו שקיימת ב- $G$  תת חבורה נורמלית לא

טריוויאלית.

4.2. תהא  $G = S_4$  הפועלת על הקבוצה  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  ע"י  $g * x = g(x)$ . חשבו

את המייצב של  $x = 2$ . האם המייצב של  $x = 2$  הוא ת"ח נורמלית של  $G$ ?

נמקו.

5. תנו דוגמה לפעולה נאמנה של חבורה לא טריוויאלית  $G$  על קבוצה  $X$  עם

איבר  $x \in X$  כך ש- $Stab(x) = G$ .

תזכורת: פעולה היא נאמנה אם רק איבר היחידה פועל באופן טריוויאלי.

6. ענו על הסעיפים הבאים:

- 6.1. מצאו בכמה דרכים שונות, עד כדי הסימטריה של הריבוע, ניתן לצבוע קודקודים של ריבוע, כאשר כל קודקוד ניתן לצבוע באחד משלושה צבעים שונים. (שימו לב: שתי צביעות יחשבו זהות אם ניתן להגיע מאחת לשניה באמצעות סיבובים ו/או שיקופים).
- 6.2. מצאו כמה לוחות משבצות  $3 \times 3$  לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע כל משבצת באחד משני צבעים שונים.
7. לתכשיט בצורת מגן דוד יש שישה משולשים בקצוות. ניתן לצבוע כל משולש באחד משלושה צבעים נתונים. כמה תכשיטים שונים כאלה אפשר לייצר אם ניתן לסובב את התכשיט ולהופכו?
8. נתונה פעולה  $G \times X \rightarrow X$  כאשר  $|G|=49, |X|=23$ . הוכיחו כי קיימת לפעולה זו לפחות נקודת שבת אחת.  
רמז: שקלו את החלוקה של  $X$  למסלולים זרים. מה הגדלים האפשריים שלהם?

בהצלחה! 😊