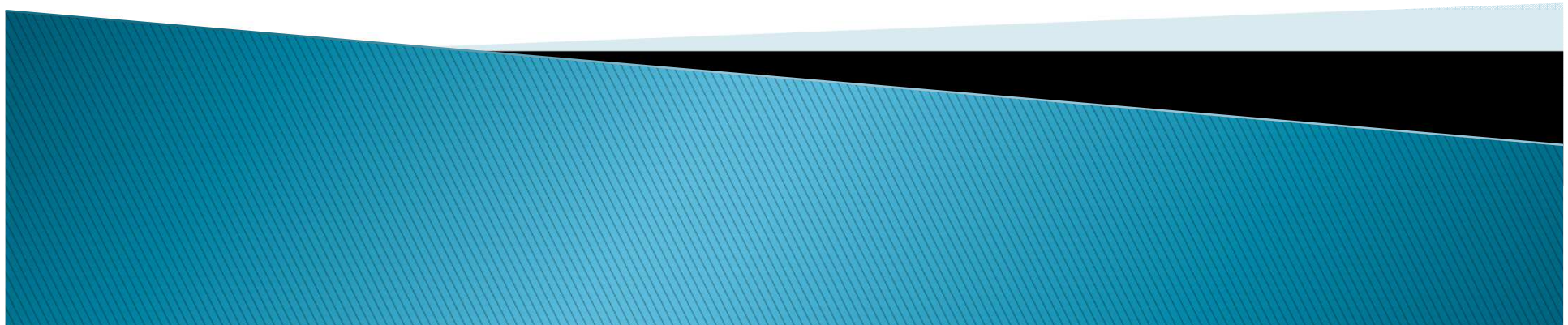


תורת המשחקים - שיעור 6

משחקי סכום אפס, אסטרטגיות מעורבות



תזכורת: דוגמה למשחק סכום אפס

▶ מצאו אסטרטגית מקסימין ואסטרטגית מינימקס עבור המשחק:

	A	B	C	D	MIN
T	8	4	8	4	
M	2	5	3	8	
B	6	1	4	5	

MAX

$$\underline{v} = 4 \quad \bar{v} = 5$$



סיכון המשחק מהדוגמה

▶ אנחנו רואים:

- שחקן 1 יכול להבטיח לעצמו לפחות 4 (מקסמין).
 - שחקן 2 יכול להבטיח ששחקן 1 יקבל לכל היותר 5 (מינמקס).
- ▶ כיוון שמתקיים $\bar{v} = 5 > \underline{v} = 4$ אנו אומרים שלמשחק אין ערך.

▶ הכוונה בכך שאין ערך למשחק אינה שלמשחק אין משמעות (או שאינו "טוב"), אלא שלמשחק בעל ערך יש מספר (הערך) שיש לו חשיבות מתימטית.

▶ למשחק ללא ערך יש גם "בעית יציבות": לדוגמה במשחק הנ"ל שחקן 1 ייבחר באסטרטגיה T ושחקן 2 ייבחר באסטרטגיה B, ונקבל תשלום של 4. אך במקרה ששחקן 2 בוחר ב B שחקן 1 היה למעשה מעדיף לבחור דווקא ב M, ואז שחקן 2 היה משנה את דעתו בהתאם...

משחק עם ערך

▶ אם מתקיים $\underline{v} = \bar{v}$ נאמר ש- **למשחק יש ערך ו-**
 $\underline{v} = \bar{v} = v$ נקרא ה- **ערך של המשחק**.

▶ במשחק בעל ערך, וקטור אסטרטגיות (s_1, s_2) המוביל לערך המשחק (כלומר s_1 הוא מקסמין, ו- s_2 הוא מינמקס) נקרא **וקטור אסטרטגיות אופטימליות**.

במשחק בעל ערך יש נק' שיווי משקל

▶ **משפט 1:** במשחק סכום אפס בעל ערך, וקטור אסטרטגיות אופטימליות הוא נקודת שיווי משקל נאש.

▶ **הוכחה:** יהי $s = (s_1, s_2)$ וקטור אסטרטגיות אופטימליות.

▶ כיוון ש s_1 היא אסטרטגית מקסמין, הרי שכל בחירת אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ תביא לתשלום של לפחות v . כלומר

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, t_2) \geq v = u(s_1, s_2)$$

▶ בצורה דומה

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(t_1, s_2) \leq v = u(s_1, s_2)$$

▶ לכן לאף שחקן אין אינטרס לזוז מהוקטור s , כלומר הוא שיווי משקל נאש.

▶ מש"ל



ולהיפך: משחק עם שיווי משקל הוא בעל ערך

▶ משפט 2: משחק סכום אפס בעל נק' שיווי משקל הוא משחק בעל ערך.

▶ הוכחה: נסמן ב $s = (s_1, s_2)$ את נק' שיווי המשקל.
▶ נסמן $v = u(s_1, s_2)$.

▶ לפי הגדרת שיווי משקל

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, t_2) \geq u(s_1, s_2) = v$$

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(t_1, s_2) \leq u(s_1, s_2) = v$$

▶ אם $\underline{v} \leq v$ וגם $v \geq \bar{v}$.

▶ אבל ציינו כבר שמתקיים תמיד $\bar{v} \leq \underline{v}$ -- לכן $\underline{v} = \bar{v}$.

▶ מש"ל.



נקודות אוכף

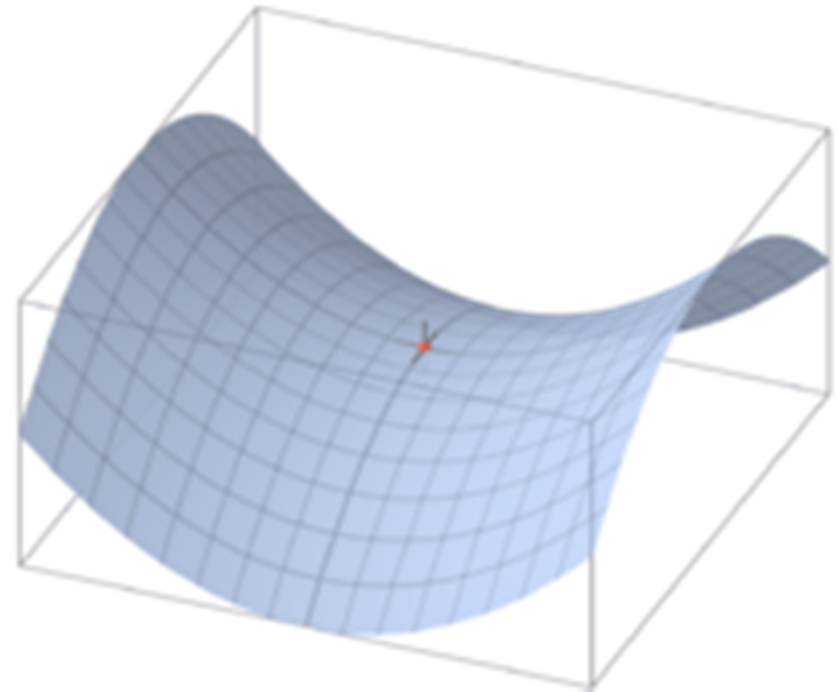
הערה: נשים לב שוקטור אסטרטגיות אופטימליות במשחק סכום אפס בעל ערך מייצג **נקודת אוכף** של פונקצית התועלת u כפונקציה של שני משתנים.

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, t_2) \geq u(s_1, s_2)$$

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(t_1, s_2) \leq u(s_1, s_2)$$

כלומר במשחק סכום אפס:

משפט: וקטור $s = (s_1, s_2)$ הוא נק' אוכף אם ורק אם המשחק הוא בעל ערך ו- s הוא וקטור אסטרטגיות אופטימליות.



דוגמה: משחק סכום אפס רציף

- ▶ קבוצת האסטרטגיות של שני השחקנים היא $S_i = [0,1]$.
- ▶ פונקציית התועלת של המשחק היא

$$u(x, y) = 4xy - 2x - y + 3$$

- ▶ נחשב תחילה את ערך המקסמין \underline{v} :

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} u(x, y)$$

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0,1]} u(x, y) &= \min_{y \in [0,1]} ((4x - 1)y - 2x + 3) \\ &= \min_{y \in [0,1]} (my + b) \end{aligned}$$

- ▶ לכל בחירה של x נקבל פונקציה לינארית ב y , והמינימום נקבע ע"י נקודות השפה בהתאם לשיפוע.

המשך

▶ השיפוע הוא $4x - 1$ ולכן הוא שלילי כאשר $x \in [0, \frac{1}{4})$,

וחיובי כאשר $x \in (\frac{1}{4}, 1]$

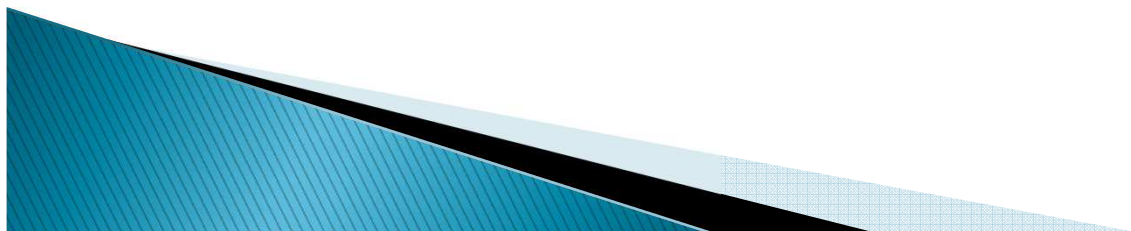
▶ המינימום עבור $x \in [0, \frac{1}{4})$ מתקבל כאשר $y = 1$ וערכו הוא

$$u(x, 1) = 4x - 1 - 2x + 3 = 2x + 2$$

▶ המינימום עבור $x \in (\frac{1}{4}, 1]$ מתקבל כאשר $y = 0$

$$u(x, 0) = -2x + 3$$

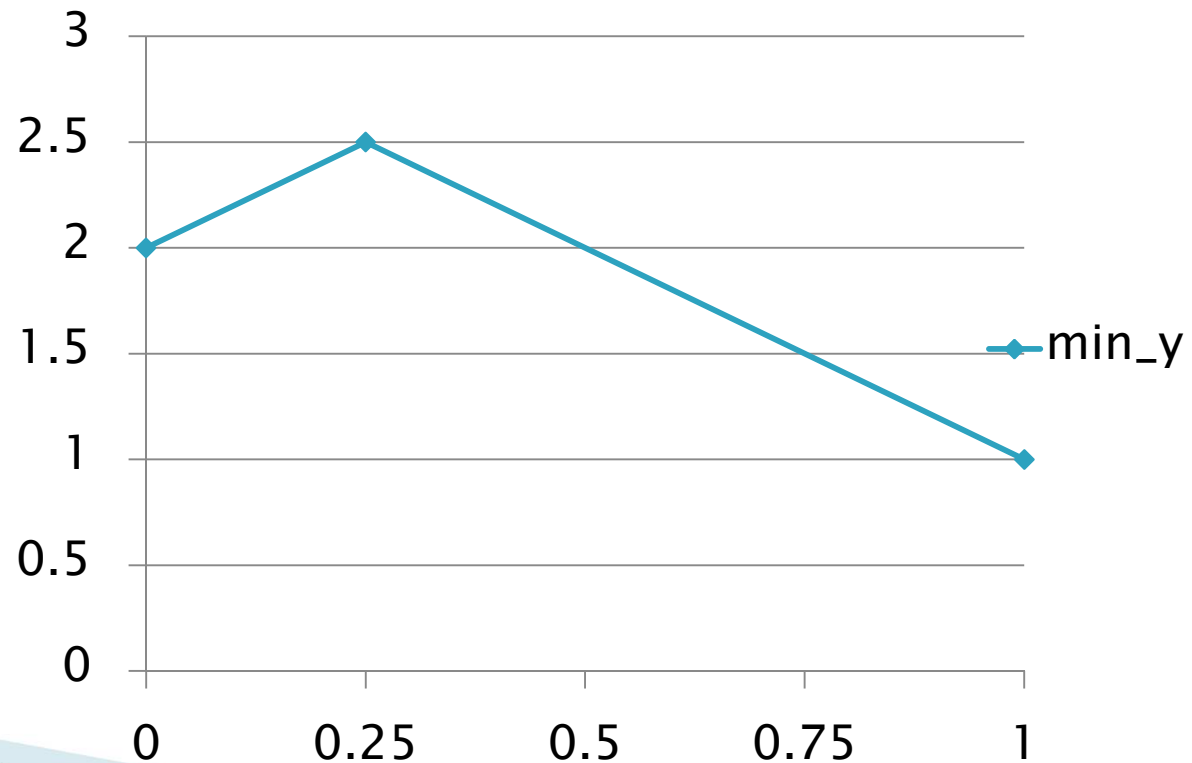
▶ כאשר $x = \frac{1}{4}$ נקבל 2.5 $u(\frac{1}{4}, y) = y - \frac{2}{4} - y + 3 = 2.5$



המשך

$$\min_{y \in [0,1]} u(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq \frac{1}{4} \\ -2x + 3 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

סה"כ נקבל ▶



המשך

לכן: ▶

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} u(x, y) = 2.5$$

ומתקיים ש- $x = \frac{1}{4}$ היא אסטרטגית המקסמין של שחקן 1.

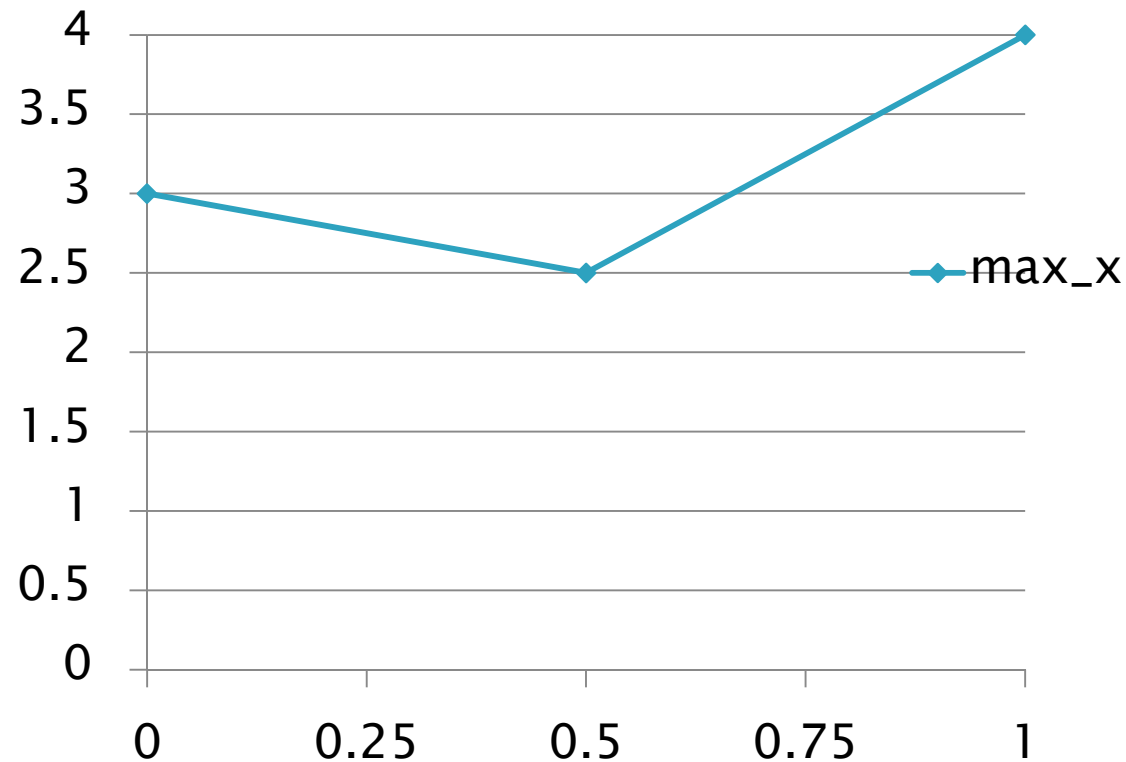
כעת צריך לחשב את ▶

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} u(x, y)$$

$$\max_{x \in [0,1]} u(x, y) = \begin{cases} -y + 3 & y \leq \frac{1}{2} \\ 3y + 1 & y > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{באופן דומה מקבלים: ▶}$$



המשך



נקבל $\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} u(x, y) = 2.5$ ▶
ואסטרטגית המינמקס של שחקן 2 היא $y = \frac{1}{2}$.

המשך - סיכום

▶ קיבלנו שלמשחק יש ערך והוא 2.5.

▶ וקטור האסטרטגיות האופטימליות הוא $s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

▶ יש שיווי משקל נאש היחיד במשחק והוא:

▶ $s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ -- איך רואים זאת בלי משפט 2?




אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

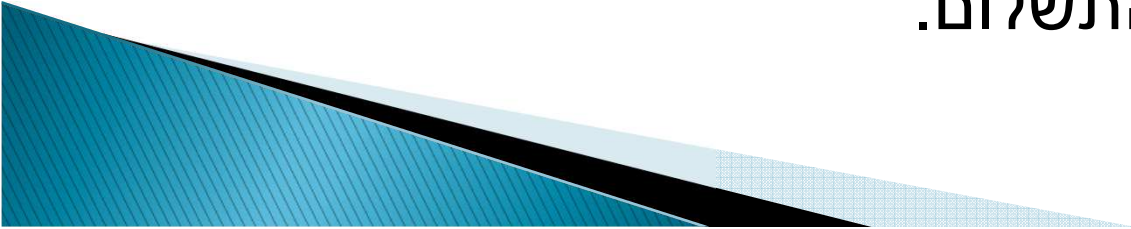
- ▶ נתחיל בתיקון טעות מהשיעור הקודם.
- ▶ הגדרנו את **משחק הטלת המטבעות** בצורה הבאה:
 - ▶ כל אחד משני שחקנים מטיל מטבע (H - עץ, T - פלי).
 - ▶ אם התוצאות זהות HH או TT אזי שחקן 1 מנצח ושחקן 2 מעביר לו שקל.
 - ▶ אם התוצאות שונות HT או TH אזי שחקן 2 מנצח ושחקן 1 מעביר לו שקל.
 - ▶ איפה הטעות?
- ▶ אין כאן באמת משחק אסטרטגי, כי אין לאף שחקן אסטרטגיה לבחור.



אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- ▶ היינו צריכים להגדיר את **משחק הטלת התאמת המטבעות** בצורה הבאה:
 - ▶ כל אחד משני שחקנים **מטיל בוחר צד של** מטבע (H - עץ, T - פלוי).
 - ▶ אם התוצאות זהות HH או TT אזי שחקן 1 מנצח ושחקן 2 מעביר לו שקל.
 - ▶ אם התוצאות שונות HT או TH אזי שחקן 2 מנצח ושחקן 1 מעביר לו שקל.
 - ▶ אבל מה קורה אם באמת אחד השחקנים מחליט שבמקום לבחור בעצמו צד הוא יטיל את המטבע, ונפילת המטבע תקבע את בחירתו?
- 

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- ▶ ניתן להסתכל על הטלת מטבע זו כבחירת אסטרטגיה (שונה משתי האסטרטגיות הרגילות של בחירת צד המטבע).
 - ▶ ניתן לכתוב אסטרטגיה זו כך: $\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]$ -- יש הסתברות $\frac{1}{2}$ לבחירת עץ והסתברות $\frac{1}{2}$ לקבלת פלי.
 - ▶ לדוגמה שחקן 1 כעת בעל אסטרטגיות $\left\{H, T, \left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]\right\}$ ושחקן 2 נשאר עם אסטרטגיות $\{H, T\}$.
 - ▶ אבל איך מגדירים את התשלום $u\left(\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right], H\right) = ???$
 - ▶ אנחנו לא יודעים מראש מה תהיה תוצאת המשחק, ולכן לא ניתן לקבוע מה יהיה התשלום.
- 

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

▶ פתרון אפשרי לבעיה זו היא בחירת **התוחלת** של התשלומים כתשלום לאסטרטגיה "המעורבת" $:\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]$

$$u\left(\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right], H\right) = \frac{1}{2}u(H, H) + \frac{1}{2}u(T, H) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

▶ לבחירה זאת יש תכונות נוחות מאד, נשים לב שפונקצית התשלום פועלת באופן לינארי על האסטרטגיה המעורבת.



משחק התאמת המטבעות עם אסטרטגיות מעורבות

נזכר במטריצת המשחק: ▶

שחקן 2

		H	T	MIN
שחקן 1	H	1	-1	-1
	T	-1	1	-1
MAX		1	1	$\underline{v} = -1 \quad \bar{v} = 1$



משחק התאמת המטבעות עם אסטרטגיות מעורבות

▶ נוסיף את האסטרטגיות המעורבות:

שחקן 2

	H	$\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T$	T	MIN
שחקן 1	H	1	0	-1
$\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T$	H	0	0	0
T	H	-1	0	1
	MAX			$\underline{v} = 0 \quad \bar{v} = 0$

משחק התאמת המטבעות עם אסטרטגיות מעורבות

▶ ראינו שהוספת אסטרטגיה מעורבת $\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]$ למעשה פתרה את המשחק.

▶ כעת יש לנו ערך למשחק וגם שיווי משקל נאש יחיד.

▶ אם שני השחקנים יתאמו ששניהם יטילו מטבעות, אזי לאף אחד מהם לא יהיה מניע לשנות את האסטרטגיה שלו.

▶ דוגמה זו ממחישה באופן טוב מאד מדוע כדאי לשקול הוספת אסטרטגיות מעורבות למשחקים.

▶ אבל מדוע להסתפק בהוספת אסטרטגיה אחת? ניתן

להוסיף רצף של אסטרטגיות מעורבות מהצורה

$$.[pH, (1 - p)T]$$

▶ לדוגמה: $H = [1H, 0T], T = [0H, 1T]$

משחק התאמת המטבעות עם אסטרטגיות מעורבות

▶ הפכנו את המשחק הסופי למשחק סכום אפס רציף, עם פונקצית התועלת הבאה:

$$\begin{aligned}u\left([pH, (1-p)T], [qH, (1-q)T]\right) &= \\&= pu(H, [qH, (1-q)T]) + (1-p)u(T, [qH, (1-q)T]) = \\&= pqu(H, H) + p(1-q)u(H, T) + \\&\quad + (1-p)qu(T, H) + (1-p)(1-q)u(T, T) = \\&= pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = \\&= 4pq - 2p - 2q + 1\end{aligned}$$



משחק התאמת המטבעות עם אסטרטגיות מעורבות

▶ למעשה בחירת אסטרטגיה שקולה לבחירת מספר בקטע $[0,1]$.

▶ לכן ניתן לכתוב בקיצור $u(p, q) = 4pq - 2p - 2q + 1$.
▶ כעת נמצא את ערכי המקסמין והמינימקס של המשחק.

$$\begin{aligned}\min_{q \in [0,1]} u(p, q) &= \min_{q \in [0,1]} ((4p - 2)q - 2p + 1) \\ &= \min_{q \in [0,1]} (mq + b)\end{aligned}$$

▶ השיפוע של $u(p, q)$ כפונקציה של q הוא $4p - 2$ -- לכן השיפוע מחליף סימן ב $p = \frac{1}{2}$



משחק התאמת המטבעות עם אסטרטגיות מעורבות

$$\min_{q \in [0,1]} u(p, q) = \begin{cases} u(p, 1) & p \leq \frac{1}{2} \\ u(p, 0) & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ערך המקסמין
מתקבל
באסטרטגיה
של שחקן 1
 $p = \frac{1}{2}$

$$= \begin{cases} 2p - 1 & p \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2p & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underline{v} = \max_{p \in [0,1]} \min_{q \in [0,1]} u(p, q) = 0$$

משחק התאמת המטבעות עם אסטרטגיות מעורבות

▶ בצורה דומה מראים

$$\bar{v} = \min_{q \in [0,1]} \max_{p \in [0,1]} u(p, q) = 0$$

▶ ערך המקסמין מתקבל באסטרטגיה $q = \frac{1}{2}$ של שחקן 2.

▶ אם כך יש למשחק ערך והוא $v = 0$ והוא מתקבל באסטרטגיה $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

▶ אסטרטגיה זו היא שיווי משקל נאש (היחיד במשחק).

▶ תרגיל בית: מצאו את שיווי משקל נאש בעזרת פונקציות BR כפי שעשינו בשיעור 4.



הוספת אסטרטגיות מעורבות

▶ יהי G משחק בו לשחקן i יש מספר סופי של אסטרטגיות:

$$S_i = \{x_1, \dots, x_n\}$$

▶ נוסיף לשחקן i אסטרטגיות באופן הבא:

◦ נבחר n הסתברויות $p_1, \dots, p_n \in [0,1]$ כך ש

$$p_1 + \dots + p_n = 1$$

◦ נוסיף את האסטרטגיה המעורבת $[p_1x_1, \dots, p_nx_n]$.



המשפטים של תורת המשחקים

▶ **משפט נאש:** יהי G משחק סופי עם מספר סופי של אסטרטגיות, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות (לכל השחקנים), אזי ב G' קיים שיווי משקל נאש.

▶ **משפט המינימקס (פון-נוימן):** יהי G משחק סכום אפס, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות, אזי מתקיים

$$\max_{p_1} \min_{p_2} u(x_1, x_2) = \min_{p_2} \max_{p_1} u(x_1, x_2)$$

◦ כלומר למשחק G' יש ערך.

▶ משפט המינימקס הוא מסקנה של משפט נאש, מדוע?

ניתוח משחק

zero sum political game – מילטון פרידמן ▶

<http://www.youtube.com/watch?v=OoSzrgMNx8s> ▶

האם המשחקים שמילטון פרידמן מציג הם אכן משחקי סכום אפס? ▶

