אינפי' 1 תשע"ט – תרגיל 4

- **התרגיל השבוע הוא <u>לא</u> להגשה.**

1. מיצאו את הנגזרת של הפונקציות הבאות. <u>בשאלה זו יש לבצע את הגזירות לפי הגדרת הנגזרת בלבד.</u>

א. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 9}}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^4 + (x+\Delta x)^2 + 9} - \sqrt{x^4 + x^2 + 9}}{\Delta x}$$

$$= \frac{(x+\Delta x)^4 + (x+\Delta x)^2 + 9\text{-}(x^4 + x^2 + 9)}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)^4 + (x+\Delta x)^2 + 9} + \sqrt{x^4 + x^2 + 9})}$$

$$= \frac{4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 + 2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^4 + (x+\Delta x)^2 + 9} + \sqrt{x^4 + x^2 + 9}\right)}$$

$$= \frac{4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x + \Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^4 + (x+\Delta x)^2 + 9} + \sqrt{x^4 + x^2 + 9}}$$

כעת ניתן לקחת חלק סטנדרטי:

$$f'(x) = st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{4x^3 + 2x}{2\sqrt{x^4 + x^2 + 9}}$$

ב. $\boldsymbol{f(x) = x^{2018}}$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{2018} - x^{2018}}{\Delta x} = \frac{\binom{2018}{1}x^{2017}\Delta x + \binom{2018}{2}x^{2016}\Delta x^2 + \binom{2018}{3}x^{2015}\Delta x^3 + \cdots}{\Delta x}$$

$$= \binom{2018}{1}x^{2017} + \binom{2018}{2}x^{2016}\Delta x + \binom{2018}{3}x^{2015}\Delta x^2 + \cdots$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי:

$$\frac{dy}{dx} = st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \binom{2018}{1}x^{2017} = 2018x^{2017}$$

ג. $\boldsymbol{f(x) = 2^{20}}$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2^{20} - 2^{20}}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

לכן $\frac{dy}{dx} = st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st(0) = 0$.

2. מצאו את משוואת המשיק של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = a$. <u>בשאלה זו יש לבצע את הגזירות לפי הגדרת הנגזרת בלבד.</u>

I. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \qquad a = 1$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{(x+\Delta x)^4-(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)+1-(x^4-x^3+x^2-x+1)}{\Delta x} =$$

$$\frac{x^4+4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+3x\Delta x^3+\Delta x^4-x^3-3x^2\Delta x-3x\Delta x^2-\Delta x^3+x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x-\Delta x+1-x^4+x^3-x^2+x-1}{\Delta x}.$$

$$= \frac{4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+3x\Delta x^3+\Delta x^4-3x^2\Delta x-3x\Delta x^2-\Delta x^3+2x\Delta x+\Delta x^2-\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= 4x^3 + 6x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2 + 2x + \Delta x - 1$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי ונקבל: $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.
לכן השיפוע של המשיק בנקודה $x = 1$ הוא $m = 2$. לכן בנקודה $(x_0, y_0) = (1,1)$ משוואת המשיק היא:
$y - 1 = 2(x - 1)$ כלומר $y = 2x - 1$.

II. $f(x) = \sqrt[3]{x + 4} \qquad a = 4$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x+4}-\sqrt[3]{x+4}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt[3]{x+\Delta x+4}-\sqrt[3]{x+4})(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2})}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2})} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2})} = .$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2}}$$

כעת ניתן לקחת חלק סטנדרטי:
$st(\ldots) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}$,
כלומר $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}$.
לכן בנקודה $x = 4$ השיפוע הוא $m = \frac{1}{12}$. לכן בנקודה $(x_0, y_0) = (4,2)$ משוואת המשיק היא:
$y - 2 = \frac{1}{12}(x - 4)$ כלומר $y = \frac{1}{12}x + \frac{5}{3}$.

3. מצאו את הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ (רצוי להשתמש בכללי גזירה שלמדנו).

I. $f(x) = (2x + 3)^6(x^2 - x - 1)$

נסמן $u = (2x + 3)^6$ ואז $u' = 6(2x + 3)^5 \cdot 2$, וכן $v = x^2 - x - 1$ ואז $v' = 2x - 1$, לכן:
$f' = u'v + uv' = 12(2x + 3)^5(x^2 - x - 1) + (2x + 3)^6(2x - 1)$

II. $f(x) = \frac{4x^3-3x^2+x-3}{6x^4-16}$

נסמן $u = 4x^3 - 3x^2 + x - 3$ ואז $u' = 12x^2 - 6x + 1$, וכן $v = 6x^4 - 16$ ואז $v' = 24x^3$, לכן:
$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(12x^2-6x+1)(6x^4-16)-24x^3(4x^3-3x^2+x-3)}{(6x^4-16)^2}$.

III. $f(x) = (((2x+3)^4+5)^6+7)^8$.

$$f'(x) = 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7(((2x+3)^4+5)^6+7)' =$$
$$= 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5((2x+3)^4+5)' =$$
$$= 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5 4(2x+3)^3(2x+3)' =$$
$$= 8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5 4(2x+3)^3 2$$

IV. $f(x) = \frac{((x+1)^2+1)^2}{(x^2-3x-3)^{20}}$.

נסמן $u = ((x+1)^2+1)^2$ ואז $u' = 4((x+1)^2+1)(x+1)$, וכן $v = (x^2-3x-3)^{20}$ ואז $v' = 20(x^2-3x-3)^{19}(2x-3)$. לכן:

$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{4((x+1)^2+1)(x+1)(x^2-3x-3)^{20} - 20(x^2-3x-3)^{19}(2x-3)((x+1)^2+1)^2}{(x^2-3x-3)^{40}}$.

4. מצאו את ϵ (התלוי בנקודה x וב- dx) המקיים $\Delta y = dy + \epsilon dx$ עבור הפונקציות $f(x)$ הבאות:

I. $f(x) = 7x - 9$

$7 = \frac{7\Delta x}{\Delta x} = \frac{7(x+\Delta x)-9-(7x-9)}{\Delta x}$. כלומר החלק הסטנדרטי (הנגזרת) הוא 7 ולא נשאר כלום – כלומר $\epsilon = 0$. (הגיונית, זהו קו ישר לכן המשיק שלו בכל נקודה הוא הוא עצמו).

II. $f(x) = x^5$

$$\frac{(x+\Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} = \frac{x^5 + 5x^4\Delta x + 10x^3\Delta x^2 + 10x^2\Delta x^3 + 5x\Delta x^4 + \Delta x^5 - x^5}{\Delta x} =$$
$$= \frac{5x^4\Delta x + 10x^3\Delta x^2 + 10x^2\Delta x^3 + 5x\Delta x^4 + \Delta x^5}{\Delta x} = 5x^4 + 10x^3\Delta x + 10x^2\Delta x^2 + 5x\Delta x^3 + \Delta x^4$$

כלומר החלק הסטנדרטי (הנגזרת) הוא $5x^4$ וההפרש הוא $\epsilon = 10x^3\Delta x + 10x^2\Delta x^2 + 5x\Delta x^3 + \Delta x^4$.

5. יהיו f, g פונקציות ממשיות, $a \in R$. הוכיחו/הפריכו:

א. אם f גזירה בנקודה a ו-g גזירה בנקודה a, אז f+3g גזירה בנקודה a.

<u>הוכחה:</u> הפונקציה הקבועה 3 היא גזירה כי כל פונקציה קבועה היא גזירה. נתון כי g גזירה. לכן 3g גזירה כי מכפלת גזירות היא גזירה. לסיום f+3g גזירה כי סכום גזירות היא גזירה.

ב. אם f גזירה בנקודה a ו-g איננה גזירה בנקודה a, אז f+g איננה גזירה בנקודה a.

<u>הוכחה:</u>
נניח בשלילה ש-f גזירה, g לא גזירה, f+g כן גזירה.
לפי הפרש של פונקציות גזירות היא פונקציה גזירה מקבלים כי: f-(f+g) גזירה. כלומר כי g גזירה. אך זו סתירה לכך ש-g לא גזירה.

ג. אם f איננה גזירה בנקודה a ו-g איננה גזירה בנקודה a, אז f+g איננה גזירה בנקודה a.

<u>הפרכה:</u>

נבחר

$$f = |x|$$
$$g = -|x|$$

הפונקציות f,g כל אחת לא גזירה בנקודה x=0 כפי שראיתם בהרצאה. ומתקיים:

$$f + g = |x| - |x| = 0$$

והפונקציה הקבועה 0 היא כמובן כן גזירה.

<u>שימו לב:</u> טעות נפוצה היא לבחור את הדוגמא הדומה $f = 1/x, g = -1/x$. דוגמא זו לא עובדת כדי להפריך את הטענה: $f + g$ לא מוגדרת ב-0 לכן f+g גם כן לא גזירה ב-0. (במילים אחרות, f+g איננה הפונקציה הקבועה 0 אלא יש לה "חור" ב-x=0).

ד. אם f גזירה בנקודה a אז f גזירה לכל x>a.

<u>הפרכה:</u> למשל נקח את הפונקציה $f = |x|$. היא גזירה למשל בנקודה $a = -5$, אבל היא לא גזירה לכל $x > -5$ כי היא לא גזירה ב-x=0.

ה. אם f גזירה בנקודה a אז f גזירה לכל x>a או f גזירה לכל x<a.

<u>הפרכה:</u> למשל נקח את הפונקציה $f(x) = |x| + |1 - x|$. בנקודה $x = \frac{1}{2}$ היא גזירה כי לכל x בין 0 ל-1 הפונקציה היא פשוט הפונקציה הקבועה 1. מצד שני בנקודות x=0, x=1 הפונקציה איננה גזירה מאותה סיבה שהפונקציה |x| לא גזירה ב-0. (הראו זאת).
אפשרות נוספת: פונקציית הערך השלם.
אפשרות נוספת: להגדיר פונקציה ששווה 1 לכל x<0, שווה 2 לכל 0<x<1, ושווה 3 לכל x>1. היא לא גזירה בנקודות 0,1 אבל כן גזירה בכל נקודה אחרת.

ו. אם f מוגדרת בנקודה a אז f גזירה בנקודה a.

<u>הפרכה:</u> הפונקציה |x| בנקודה 0.