תזכורת:

קבוצה $V \supseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ נקראת בת"ל, אם:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0 \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

אינטואיטיבית - בקבוצה בת"ל אין וקטור "מיותר" - שאפשר לבטא אותו כצירוף ליניארי של האחרים.

*

$$\mathbb{R}[x] = span\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots\right\}$$

לא נתעסק במרחבים כאלה.

בסיסים של המרחבים הנפוצים: הגודל של הבסיס נקרא **המימד** של המרחב, ומסומן $\dim V$. באופן כללי:

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$$

נשים לב שהבסיס: $\{1, x, \ldots, x^n\}$ מכיל $n+1$ איברים.

$$\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$$

אפשר לבחור כבסיס את הקבוצה: $\{E_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, מטריצות שיש להן 1 במקום ה־ij והשאר אפסים. למשל, בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 3}$ הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}, \ldots\right\}$$

מה אפשר לעשות עם המימד? היום נראה שאף על פי שהוא נראה פחות חשוב מההגדרות של בת"ל ופורשת, אפשר לעשות איתו דברים יפים.

ראינו שאם A בת"ל ו־B פורשת, אז $|A| \leq |B|$. לכן, אם S בסיס, אז: $|A| \leq |S| \leq |B|$. הגודל של S הוא המימד של המרחב הוקטורי V, ולכן אפשר לומר שאם $\dim V = n$, אז בקבוצה בת"ל יש לכל היותר n איברים ובקבוצה פורשת יש לכל הפחות n איברים.

במילים אחרות, אם $|A| > \dim V$, אז בהכרח A לא בת"ל (כן ת"ל). מצד שני, אם $|A| < \dim V$ אז A בהכרח לא פורשת את V. למשל, ב-$\mathbb{R}^4$:

$$A = \{(1,5,2,3), (2,0,9,9), (-1,7,5,4)\}$$

$$B = \{(0,4,0,0), (5,1,5,1), (9,4,3,6), (-2,1,-2,7), (3,-3,1,1)\}$$

מתקיים: $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. לפי מה שהסברנו, A בהכרח לא פורשת, B בהכרח לא בת"ל; לכן A, B לא בסיסים.
נדגיש: אם $|A| < \dim V$, זה לא אומר ש-A בת"ל, רק שהיא לא פורשת; יכול להיות שהיא גם לא בת"ל, למשל:

$$A = \{(1,0,0,0), (2,0,0,0)\}$$

ומצד שני, אם $|A| > \dim V$, זה לא אומר ש-A פורשת, רק שהיא לא בת"ל; יכול להיות שהיא גם לא פורשת, למשל:

$$A = \{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (4,0,0,0), (5,0,0,0)\}$$

מתקיים:

$$sp(A) = \{(x,0,0,0) \,|x \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^4$$

<u>משפט:</u>
בסיס אם ורק אם בת"ל מקסימלית אם ורק אם פורשת מינימלית.
למשל:

$$A = \{(1,0,0,0), (0,2,0,0)\} \to \{(1,0,0,0), (0,2,0,0), (0,0,3,0)\}$$

הוספנו וקטור והקבוצה עדיין בת"ל, לכן A לא בת"ל מקסימלית ולכן לא בסיס.
נשים לב: אנחנו "מחליפים" אחת מהתכונות שלנו (בת"ל/פורשת) בטענה על הגודל של הקבוצה (למשל: "בת"ל ומקסימלית" במקום "בת"ל ופורשת").

מכאן, בת"ל שהיא לא מקסימלית היא לא בסיס, וכך גם פורשת שאיננה

מינימלית. כל קבוצה בת"ל שאיננה בסיס אפשר להשלים לבסיס - להוסיף לה עוד וקטורים עד שתהפוך לפורשת, תוך כדי שהיא נשארת בת"ל. כמו כן, כל קבוצה פורשת שאיננה בסיס אפשר "לסנן" לבסיס - להוריד ממנה וקטורים עד שתהפוך לבת"ל, תוך כדי שהיא נשארת פורשת.

<u>משפט:</u>
השלישי חינם - אם $\dim V = n$, אז אם $|B| = n$ ו־B בת"ל אז B בסיס; אם $|B| = n$ ו־B פורשת אז B בסיס. במילים אחרות, אנחנו יכולים להחליף אחד מהתנאים בת"ל/פורשת בתנאי "הגודל של הקבוצה שווה למימד של המרחב הוקטורי", שזה תנאי שדי קל לבדוק...
למשל, האם $B = \{(1,3,4,2),(2,6,7,7),(-1,3,9,4),(12,1,7,3)\}$ בסיס של $\mathbb{R}^4$? מתקיים: $|B| = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, ולכן - לפי משפט השלישי חינם - כדי לבדוק ש־B בסיס מספיק לבדוק שהיא בת"ל (או פורשת).
חשוב לשים לב שאם רק יודעים ש: $|B| = \dim V$, זה לא אומר ש־B בסיס.
מצד שני, אפשר לומר שאם: $|B| = \dim V$, אז: B בת"ל אם ורק אם B פורשת אם ורק אם B בסיס.

<u>משפט:</u>
יהי V מרחב וקטורי ויהיו: U, W תתי־מרחבים. אם $U \subseteq W$ ו־$\dim U = \dim W$ אז: $U = W$; כלומר, במקום הכלה דו־כיוונית מספיקה לנו הכלה בכיוון אחד ושוויון בין המימדים.
בפרט, אם $\dim U = \dim V$ אז: $U = V$ (במילים: תת־מרחב עם אותו מימד כמו של המרחב הגדול שווה למרחב הגדול).

שאלות טכניות - מה אנחנו צריכים לדעת לעשות?

1. יש לנו 3 דרכים להציג מרחב וקטורי:

א. כאוסף פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות הומוגנית, למשל:

$$\left\{A\in\mathbb{R}^{3\times 3}|A=A^t\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}|\left\{\begin{array}{c} b-d=0\\ c-g=0\\ h-f=0\end{array}\right.\right\}$$

ב. כאיבר כללי ("כל הוקטורים מהצורה..."), למשל:

$$\left\{(a,b,a+b,a-b)\,|a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ג. כמרחב נפרש, למשל:

$$span\left\{x^2+x-1,x^3-2x,x^2+5x+4\right\}$$

דבר ראשון – אנחנו צריכים להבין איך עוברים בין ההצגות השונות. למשל, אם מרחב נתון כמרחב נפרש, איך נתאר אותו כאוסף הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית?

2. איך מוצאים בסיס לתת־מרחב? מספיק להבין איך מוצאים בסיס למרחב שמוצג כמרחב נפרש. כשהמרחב מוצג כמרחב נפרש, כבר יש לנו קבוצה פורשת, ולכן מספיק להבין איך "מסננים" קבוצה פורשת לבסיס – גם בת"ל.

3. גם מצד שני – בהינתן קבוצה בת"ל, איך משלימים אותה לבסיס?

4. איך בודקים שקבוצה היא בת"ל – כבר אמרנו, נזכיר בהמשך. כנ"ל לגבי פורשת, וגם איך בודקים שוקטור מסוים שייך למרחב נפרש.

5. איך מוצאים בסיס לסכום $U+W$, כשכבר נתונים לנו בסיסים של U,W. נראה שמספיקות לנו קבוצות פורשות.

6. איך מוצאים בסיס לחיתוך $U\cap W$, כשכבר נתונים לנו בסיסים של U,W. יש שתי דרכים, נציג אחת ואולי נספיק גם את השניה.

7. בהינתן שתי קבוצות, איך בודקים שהן פורשות את אותו תת־מרחב? למשל, האם:

$$span\left\{x^2+x-1,x^3-2x,x^2+5x+4\right\}=span\left\{x^3+5x+1,x^3-x^2+x+2,x^2+3x\right\}$$

לאט־לאט.

1. א. איך עוברים ממרחב שמוצג באמצעות משוואות למרחב שמוצג באמצעות איבר כללי? פותרים את המשוואות. למשל:

$$\left\{A\in\mathbb{R}^{3\times3}|A=A^t\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}\mid\left\{\begin{array}{c}b=d\\c=g\\h=f\end{array}\right\}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&d&g\\d&e&h\\g&h&k\end{pmatrix}|a,d,e,g,h,k\in\mathbb{R}\right\}$$

בעצם, מוצאים את הפתרון הכללי של המערכת וזהו האיבר הכללי שמתאר את תת־המרחב.

ב. איך עוברים מאיבר כללי למרחב נפרש? "מפרקים" את האיבר הכללי לפי הסקלרים, הוקטורים שמופיעים בצירוף הם הקבוצה הפורשת. למשל:

$$\{(a,b,a+b,a-b)\,|a,b\in\mathbb{R}\}=\{(a,0,a,a)+(0,b,b,-b)\,|a,b\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{a\,(1,0,1,1)+b\,(0,1,1,-1)\,|a,b\in\mathbb{R}\}=span\,\{(1,0,1,1)\,,(0,1,1,-1)\}$$

ג. איך עוברים ממרחב שמוצג באמצעות מערכת משוואות למרחב נפרש? את המשוואות נפתור ונקבל איבר כללי, שאותו נפרק לפי הסקלרים.

ד. איך עוברים ממרחב נפרש למערכת משוואות? רושמים את הוקטורים של הקבוצה הפורשת בעמודות מטריצה, בעמודה נוספת רושמים איבר כללי, מדרגים ודורשים שיהיה פתרון. התנאים שמתקבלים הם המשוואות המייצגות. למשל, נמצא משוואות שמייצגות את:

$$span\,\{(1,0,1,1)\,,(0,1,1,-1)\}$$

נרשום בעמודות מטריצה, בעמודה נוספת איבר כללי ונדרוש שיהיה פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\1&1&z\\1&-1&w\end{array}\right)$$

נבצע: $R_3-R_1\to R_3,R_3-R_2\to R_3,R_4-R_1\to R_4,R_4+R_2\to R_4$

ונקבל:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x-y \\ 0 & 0 & w-x+y \end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון, כשבמטריצה יש שורת אפסים גם בעמודה הנוספת צריך להיות 0, וקיבלנו שני תנאים: $z-x-y=w-x+y=0$. סה"כ:

$$span\left\{(1,0,1,1),(0,1,1,-1)\right\}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\middle|\begin{cases} z-x-y=0 \\ w-x+y=0 \end{cases}\right\}$$

ה. ממרחב נפרש לאיבר כללי – פשוט מציגים צירוף ליניארי. אפשר גם: עוברים מהמרחב הנפרש למשוואות (ד') ומהמשוואות לאיבר כללי (א').
ו. מאיבר כללי למשוואות – עוברים למרחב הנפרש וממנו למשוואות.

2. איך מוצאים בסיס לתת־מרחב? נציג את המרחב כמרחב נפרש. את הקבוצה הפורשת "נסנן" לבת"ל – נשים את איברי הקבוצה הפורשת בשורות מטריצה, ונדרג; כל שורה שמתאפסת – נעיף, השורות שיישארו אחרי הדירוג ולא התאפסו – הן הבסיס. אפשר לעשות גם עם עמודות, לא ניכנס לזה כרגע. למשל, נמצא בסיס לתת־המרחב:

$$span\left\{x^2+2x+3,4x^2+5x+6,7x^2+8x+9\right\}$$

כדי לשים בשורות, אנחנו צריכים "לתרגם" את הפולינומים לוקטורים: $ax^2+bx+c\mapsto(a,b,c)$. אצלנו, נשים בשורות ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זו צורה מדורגת, לא נוכל לאפס עוד שורות ולכן השורות שלא התאפסו מהוות בסיס (נתרגם חזרה לפולינומים):

$$span\left\{x^2+2x+3,4x^2+5x+6,7x^2+8x+9\right\}=span\left\{x^2+2x+3,-3x-6\right\}$$

הקבוצה $\{x^2+2x+3,-3x-6\}$ היא בסיס (בת"ל ופורשת).

3. בהינתן קבוצה בת"ל, איך משלימים אותה לבסיס? שמים את הוקטורים בשורות, מדרגים; איך נוסיף וקטורים חדשים? לכל עמודה שבה יש משתנה חופשי, נוסיף וקטור שיש לו 1 במקום של העמודה והשאר אפסים.

למשל, נשלים את $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ לבסיס של $\mathbb{R}^{2\times2}$. נשים בשורות מטריצה ונדרג: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mapsto(a,b,c,d)$:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&3\\2&1&1&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-3&-6\end{pmatrix}$$

בעמודות השלישית והרביעית יש משתנה חופשי (אין איבר מוביל), ולכן נוסיף: $(0,0,1,0)\,,(0,0,0,1)$, כלומר:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

4. איך בודקים שקבוצה היא בת"ל? שמים את הוקטורים בשורות מטריצה ומדרגים. אם אין שורת אפסים - בת"ל, אם לא - לא בת"ל.

איך בודקים שקבוצה היא פורשת? שמים את הוקטורים בעמודות מטריצה, מולם איבר כללי בעמודה הנוספת ומדרגים; אם תמיד יש פתרון (במטריצה עצמה אין שורת אפסים), אז הקבוצה פורשת. איך בודקים שאיבר מסוים שייך למרחב נפרש? שמים את איברי הקבוצה הפורשת בעמודות, את האיבר שעליו שואלים בעמודה הנוספת ובודקים אם יש פתרון. אם כן - שייך, אם לא - לא.

5. איך מוצאים בסיס לסכום $U+W$? מציגים את U,W כמרחבים נפרשים, לוקחים את האיברים של שתי הקבוצות הפורשות ושמים אותם בשורות אותה מטריצה. מדרגים, שורה שהתאפסה מעיפים, השאר הן הבסיס של הסכום. למשל:

$$U=span\left\{\left((1,0,1,1)\,,(0,1,1,-1)\right)\right\},W=span\left\{(5,1,3,1)\,,(7,4,4,4)\,,(2,-2,0,4)\right\}$$

נמצא בסיס של $U+W$ – נשים את כל הוקטורים, גם של U וגם של W, באותה מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צורה מדורגת, ולכן:

$$U+W = span\left\{(1,0,1,1),(0,1,1,-1),(0,0,-3,-3),(0,0,0,8)\right\}$$

כאשר $\left\{(1,0,1,1),(0,1,1,-1),(0,0,-3,-3),(0,0,0,8)\right\}$ בסיס.
*נשים לב שקיבלנו: $\dim(U+W) = 4 = \dim\mathbb{R}^4$, ולכן: $U+W=\mathbb{R}^4$.
מכאן, למשל, $\left\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right\}$ גם בסיס של $U+W$, כל קבוצה בת"ל אם 4 איברים תהיה בסיס של הסכום, ובאופן כללי אם הוא שווה למרחב הגדול הוא נהנה מכל היתרונות והידע שלנו על המרחב הגדול...

6. איך מוצאים בסיס לחיתוך $U\cap W$? מציגים את U,W באמצעות משוואות, והחיתוך הוא אוסף הפתרונות של כל המשוואות – גם של U וגם של W בבת אחת. למשל:

$$U = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 | \begin{cases} z-x-y=0 \\ w-x+y=0 \end{cases}\right\}, W = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 | 2x-3y+4z+w=0\right\}$$

אז:

$$U\cap W = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 | \begin{cases} z-x-y=0 \\ w-x+y=0 \\ 2x-3y+4z+w=0 \end{cases}\right\}$$

ואז נפתור את המשוואות ונציג כאיבר כללי, "נפרק" לפי הסקלרים ונציג כמרחב נפרש, את הוקטורים בקבוצה הפורשת נשים בשורות ונדרג, מי שמתאפסת מעיפים ומקבלים בסיס, כמו שהסברנו ב־$1,2$.

הערה:
את $5,6$ אפשר לבצע ליותר משני תתי־מרחבים, אם רוצים למצוא בסיס ל: $U_1+U_2+U_3+U_4$ או ל: $U_1\cap U_2\cap U_3$, למשל.

7. איך נבדוק ש: $sp\left(A\right)=sp\left(B\right)$? כמה דרכים. אפשר לבדוק האם $A\subseteq sp\left(B\right)$ וגם $B\subseteq sp\left(A\right)$; נבדוק כל וקטור ב־$A$ האם הוא שייך ל־$sp\left(B\right)$. דרך נוספת – לשים את הוקטורים של כל קבוצה בשורות מטריצה, כל קבוצה והמטריצה שלה, ולדרג קנונית. אם מקבלים את אותה הצורה הקנונית עד כדי שורות אפסים (כלומר, מתעלמים משורות האפסים) אז: $sp\left(A\right)=sp\left(B\right)$. למשל, ראינו ש:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

אם נדרג קנונית, נגיע לאותה צורה קנונית. לכן:

$$sp\left\{\left(1,2,3\right),\left(4,5,6\right),\left(7,8,9\right)\right\}=sp\left\{\left(1,2,3\right),\left(0,-3,-6\right)\right\}$$

משפט המימדים:
יהי V מרחב וקטורי על שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U,W\leq V$ תתי־מרחבים. אזי:

$$\dim\left(U+W\right)=\dim U+\dim W-\dim\left(U\cap W\right)$$

*מזכיר את: $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$ מהסתברות של בית הספר.